

Banco de México
Documentos de Investigación

Banco de México
Working Papers

N° 2020-01

Comparación de Pronósticos de la Estructura Temporal
de Tasas de Interés de México Para Distintas
Especificaciones del Modelo Afín

Alejandra Lelo-de-Larrea
Banco de México

Marzo 2020

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively the responsibility of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

Comparación de Pronósticos de la Estructura Temporal de Tasas de Interés de México Para Distintas Especificaciones del Modelo Afín*

Alejandra Lelo-de-Larrea[†]
Banco de México

Resumen: Se estiman cuatro especificaciones del modelo afín con condición de aversión al riesgo y no arbitraje para la Estructura Temporal de Tasas de Interés de México, contrastando sus propiedades empíricas y la precisión de sus pronósticos dentro y fuera de muestra. Los modelos tradicionales se extienden agregando variables macroeconómicas con el fin de analizar si estas últimas aportan información suficiente para mejorar el ajuste y los pronósticos de las tasas de interés. Utilizando datos mensuales de los Bonos Cupón Cero, VIX, WTI, tipo de cambio, inflación y crecimiento en el periodo 2002-2017, se encuentra que si bien no existe superioridad de un único modelo para el ajuste y/o pronóstico de la curva de rendimientos, agregar variables macroeconómicas ayuda a mejorar los pronósticos de corto y mediano plazo independientemente del tipo de factores utilizados.

Palabras Clave: Modelo Afín, Pronósticos de la Curva de Rendimientos, Componentes Principales, Filtro de Kalman, Condición de No Arbitraje.

Abstract: Four specifications of an affine model with risk aversion and no arbitrage conditions are estimated for the Mexican Term Structure of Interest Rates, contrasting their empirical properties and the accuracy of their in and out of sample forecasts. The traditional models are extended by adding macroeconomic variables to analyze if the latter provide sufficient information to improve the adjustment and the forecast of interest rates. Using monthly data of the Zero Coupon Bonds, VIX, WTI, exchange rate, inflation and growth in the period 2002-2017, it is found that, although there is no superiority of a single model for the in and/or out of sample forecast of the yield curve, adding macroeconomic variables helps to improve the short and medium term forecasts independently of the type of factors used.

Keywords: Afín Model, Yield Curve Forecast, Principal Components, Kalman Filter, No-Arbitrage Condition.

JEL Classification: C12, C32, C53, E43, E47, G12

*Agradezco al Banco de México por su apoyo en esta investigación. En especial, me gustaría agradecer a Rocío Elizondo y Santiago Bazdresch por su orientación y apoyo incondicional. Además, agradezco a Alejandro Islas, David Ruelas, José Luis Farah y León Berdichevsky por sus excelentes comentarios y sugerencias. Todos los errores restantes son sólo míos.

† Dirección General de Investigación Económica. Email: alejandra.lelo@banxico.org.mx.

1. Introducción

El estudio de la Estructura Temporal de Tasas de Interés (ETTI) es de suma importancia por diversas razones. Desde el punto de vista macroeconómico, la ETTI refleja las preferencias de los agentes y sus expectativas sobre el ingreso y consumo futuros, así como de los riesgos que enfrenta la economía. En particular, la ETTI contiene información sobre la trayectoria que seguirán algunas variables relevantes de la economía de un país debido a que, cuando se ajustan por el riesgo, las tasas de largo plazo representan el valor esperado de las futuras tasas de corto plazo. Desde el punto de vista de las finanzas, las tasas de interés son relevantes para estimar las primas de riesgo que los agentes económicos requieren como compensación por realizar inversiones a plazos más largos. Asimismo, su entendimiento es valioso para las políticas de financiamiento público de los gobiernos tal que puedan elegir óptimamente cuándo y con qué vencimientos se podría emitir nueva deuda soberana. Adicionalmente, la valuación de coberturas a través de contratos de derivados como swaps, caps, floors, opciones y futuros, se puede determinar mediante modelos de la curva de rendimientos (véase Duffie, Pan, y Singleton, 2000). Por último, el tema es de especial relevancia para las labores del banco central porque la curva de rendimientos en teoría refleja la expectativa de mercado acerca de las tasas de interés de política monetaria, así como la prima por plazo. En países como México, donde el instrumento de política monetaria es una tasa de corto plazo (la tasa de interés objetivo), es imperativo entender cómo los movimientos en dicha tasa afectan el resto de la curva de rendimientos.

Existe una gran variedad de estudios sobre los determinantes de la ETTI y sobre cómo modelar su dinámica. La mayoría utilizan Modelos de Vectores Autorregresivos (VAR) para modelar la dinámica de la curva de rendimientos, los cuales tienen la ventaja de ser bastante flexibles y permitir el análisis de la relación entre las variables mediante la descomposición de varianza o las Funciones de Impulso Respuesta. Sin embargo, estos modelos presentan algunas limitantes: i) sólo se puede inferir el comportamiento para aquellos vencimientos que se incluyen en el VAR; ii) no se pueden incorporar variables no observables (latentes) en el modelo debido a que todas las variables del VAR deben ser observadas; y iii) de acuerdo con

Ang y Piazzesi (2003), ante movimientos implícitos en los rendimientos dada la relación entre los mismos, no se puede descartar que existan oportunidades de arbitraje si las restricciones implícitas en este supuesto no se imponen en la estimación. Por otro lado, los estudios que utilizan modelos de factores para la ETTI tienen la ventaja de que la condición de no arbitraje se puede imponer de manera sencilla. No obstante, la mayoría de éstos no modelan la forma en que las tasas de interés responden a las variables macroeconómicas. A pesar de la relevancia de este tema, aún existen multitud de preguntas sobre la ETTI: ¿cuáles son sus determinantes?, ¿qué forma de modelar la dinámica de la ETTI genera los mejores ajustes y/o pronósticos?, ¿cómo responde la curva de rendimientos a variables macroeconómicas? Adicionalmente, la literatura asociada al estudio de la ETTI es muy amplia para economías avanzadas, pero no lo es para las economías emergentes como México.

En este documento se busca dar respuesta a dichas preguntas mediante la estimación de distintas especificaciones de un modelo afín con condición de aversión al riesgo y no arbitraje para la ETTI de México, contrastando sus propiedades empíricas y la precisión de sus pronósticos dentro y fuera de muestra. Incorporar las condiciones de aversión al riesgo y no arbitraje tiene la ventaja de que permite obtener soluciones cerradas y recursivas para las tasas, evitando así el uso de métodos Monte Carlo o de Ecuaciones Diferenciales Parciales que son computacionalmente muy costosos. Además, contrario a estimar la dinámica de los rendimientos con modelos VAR, el utilizar un modelo afín con dichas condiciones permite estimar tasas para vencimientos que no se encuentren en la muestra e incluso que no se operen en el mercado. Desde un punto de vista teórico, definir la mejor forma de modelar la curva de rendimientos ayuda a conocer qué modelos teóricos sobre la tasa se adecuan mejor a la realidad. Además, desde un punto de vista empírico, un mejor conocimiento sobre los determinantes de la curva de rendimientos permitiría realizar inferencia acerca de la situación de la economía y generar pronósticos que sean tanto confiables como precisos para ayudar a la toma de decisiones de los agentes en la economía.

En particular, se busca responder las siguientes preguntas sobre la ETTI de México: ¿es mejor utilizar un modelo afín con factores observables o con factores latentes para ajustar la dinámica de la curva de rendimientos?, ¿cómo afecta la selección de los factores del modelo a la

estimación de pronósticos fuera de muestra?, ¿incorporar variables distintas a los rendimientos ayuda a mejorar el ajuste y/o pronóstico de los modelos afines? Para ello se plantean y estiman los dos modelos tradicionalmente utilizados en la literatura: el modelo afín con factores observables y el modelo afín con factores latentes. Además, dado que variables como el tipo de cambio, la inflación o el crecimiento han demostrado estar estrechamente relacionadas con los movimientos en las tasas de interés, se extienden los modelos tradicionales añadiendo variables macroeconómicas, con el fin de analizar si estas últimas aportan información suficiente sobre la economía para mejorar el ajuste y los pronósticos obtenidos con los modelos tradicionales. Los modelos con factores observables se estiman vía Análisis de Componentes Principales (ACP), Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) y Máxima Verosimilitud de los Errores; mientras que los modelos con factores latentes se estiman vía el Filtro de Kalman y Máxima Verosimilitud de los Errores. Finalmente, se comparan las cuatro especificaciones planteadas para encontrar el modelo que mejor describa y pronostique la ETTI en México tanto de forma gráfica como utilizando el criterio del error de pronóstico, medido como la Raíz del Error Cuadrático Medio (RECM), y la prueba estadística de precisión de pronósticos de Harvey, Leybourne y Newbold (1997). Dado que el filtro de Kalman es un algoritmo predictor-corrector, se espera que el ajuste y el pronóstico de las tasas de los Bonos Cupón Cero (BCC) del modelo con factores latentes sea superior a lo obtenido con el modelo con factores observables. Además, dada la relación de las variables macroeconómicas con las tasas de interés, se espera que incorporar éstas a los modelos tradicionales ayude a mejorar los pronósticos dentro y fuera de muestra.

El resultado principal es el ajuste y pronóstico de la ETTI en México para las cuatro especificaciones planteadas del modelo afín. Sin embargo, no es posible concluir que exista superioridad de alguna de ellas para todos los vencimientos. Se verifica que el nivel, la pendiente y la curvatura de la curva de rendimientos son determinantes de la ETTI en México, pero no es posible identificar alguna de las variables macroeconómicas como factores que determinen su dinámica. No obstante, de manera general, es posible afirmar que agregar variables macroeconómicas ayuda a mejorar el pronóstico de corto y mediano plazo independientemente de si los factores utilizados son observables o latentes. Al extender el modelo con factores observables (latentes), se obtiene una ganancia en el error de pronóstico de 0.21 (0.47) puntos para las

tasas de corto plazo y de 0.21 (0.17) puntos para las de largo plazo. Estos resultados tienen impacto directo en la modelación de la ETTI dado que el cambio de metodologías y el uso de variables macroeconómicas puede producir pronósticos de tasas más confiables y precisos para su uso en los modelos de crédito, inversión, seguros, esquemas de pensiones y políticas públicas. Ponderando el costo de estimar distintos modelos para los distintos vencimientos de los BCC contra la ganancia en la exactitud del ajuste y del pronóstico, se recomienda utilizar un modelo con factores latentes cuando el objetivo sea realizar el ajuste de los rendimientos y utilizar un modelo con factores observables que incorpore variables macroeconómicas cuando el objetivo sea obtener pronósticos fuera de muestra de los mismos.

Hasta donde se tiene conocimiento, el único trabajo sobre pronósticos de la curva de rendimientos para México, Elizondo (2013), utiliza un modelo afín con factores observables. Además, no se tiene conocimiento de la existencia de algún trabajo que realice pronósticos de la ETTI en México utilizando factores latentes ni de trabajos que incorporen variables macroeconómicas como factores en el modelo. En este sentido, la primer contribución a la literatura consiste en la obtención de pronósticos, dentro y fuera de muestra, para tres especificaciones del modelo afín que no han sido utilizadas con anterioridad: el modelo afín con variables latentes, el modelo afín con factores observables y factores macroeconómicos, así como el modelo afín con factores latentes y factores macroeconómicos. Una segunda contribución consiste en la selección de las variables macroeconómicas. Aquellos trabajos que incorporan este tipo de variables comúnmente utilizan la inflación y/o el crecimiento económico. Sin embargo, para el caso de México, otras variables macroeconómicas han mostrado tener gran impacto en la economía. Por ejemplo, el tipo de cambio y el precio del petróleo cobraron relevancia en el comportamiento de los mercados financieros desde el 2014. Además, dada la estrecha relación económica con Estados Unidos, se ha observado que cambios en el Índice de Volatilidad de dicho país afectan a la economía mexicana. En este sentido, se incorpora el Chicago Board Options Exchange Market Volatility Index (VIX) como medida de incertidumbre, el precio del petróleo West Texas Intermediate (WTI), así como un factor que representa el entorno macroeconómico determinado a partir de un ACP aplicado a la variación mensual del tipo de cambio peso-dólar americano, del Índice Nacional

de Precios al Consumidor (INPC) y del Producto Interno Bruto (PIB) como variables en los modelos aumentados. Finalmente, como tercer contribución, se han realizado comparaciones de modelos afines con modelos Autorregresivos (AR), VAR y caminatas aleatorias (por ejemplo Elizondo, 2013), pero no se tiene conocimiento de algún trabajo que realice comparaciones entre distintos modelos afines.

El resto del documento está estructurado de la siguiente manera. En la sección 2, se presenta una revisión exhaustiva de la literatura de los modelos afines y sus aplicaciones. Posteriormente, la sección 3, plantea la metodología para estimar un modelo afín con factores observables, factores latentes o ambos. La sección 4, presenta los resultados obtenidos para las distintas especificaciones planteadas, mientras que la sección 5 presenta su comparación mediante la prueba estadística de Harvey, Leybourne y Newbold (1997). Finalmente, la sección 6 presenta las consideraciones finales.

2. Revisión de Literatura

El creciente interés por entender qué es lo que mueve los rendimientos de los bonos ha tenido como consecuencia que exista una vasta literatura sobre los modelos afines. Aplicados a la ETTI, estos modelos buscan, en su mayoría, describir la dinámica conjunta entre los rendimientos y los factores que la explican. Hay una gran variedad de modelos afines y la evolución que ha seguido su investigación es muy interesante.

Los primeros modelos Vasicek (1977) y Cox et al. (1985) estiman de forma cerrada y analítica los precios de los bonos. Éstos son modelos de un solo factor pues la tasa libre de riesgo era la única variable de estado en la economía. De esta manera, todos los rendimientos de los bonos están perfectamente correlacionados. Posteriormente, surgen los modelos paramétricos parsimoniosos que caracterizan la estructura temporal de tasas de interés mediante tres factores que son comúnmente denominados el nivel, la pendiente y la curvatura de dicha estructura (Nelson y Siegel (1987), Svensson (1994)). Hasta mediados de los años 90, los modelos de estructura temporal de tasas de interés se basaban en el principio de que las primas de riesgo de las tasas de largo plazo están directamente ligadas a las expectativas de las tasas

de interés de corto plazo; es decir, admiten oportunidades de arbitraje. Con autores como Duffie y Kan (1996), Dai y Singleton (2000), Ang y Piazzesi (2003) y más recientemente Cortés et al. (2008), Gimeno y Marqués (2009), Elizondo (2013), así como Aguilar-Argaez et al. (2016) se incorpora la condición de no arbitraje a estos modelos.

La variabilidad en la especificación de los modelos afines tiene principalmente dos fuentes: el tipo de función afín utilizada y el tipo de variables (estado) consideradas dentro del modelo. En cuanto al tipo de función afín, la más utilizada en la literatura es la de forma lineal, por ejemplo Ang y Piazzesi (2003), Gimeno y Marqués (2009), Elizondo (2013). Sin embargo, es posible utilizar otras formas de la función afín como en Duan y Simonato (1999), quienes proponen una formulación unificada de espacio-estado para la estimación de parámetros de modelos exponencialmente afines de la estructura temporal. Respecto a las variables de estado consideradas en el modelo, éstas pueden ser no observables o latentes (Ang et al., 2008), observables (Elizondo, 2013) o bien tanto latentes como observables (Ang y Piazzesi, 2003).

Para estimar las variables observables comúnmente se utilizan dos métodos: Análisis de Componentes Principales (Ang y Piazzesi (2003), Cortés et al. (2008), Elizondo (2013)) o componentes de Nelson-Siegel (Diebold y Li (2006), Gimeno y Marqués (2009), Favero et al. (2012)). De acuerdo con Elizondo (2013), estimar las variables de estado a partir del ACP tiene la ventaja de que se imponen menos restricciones generando un modelo parsimonioso y robusto. En contraste, al utilizar las componentes de Nelson-Siegel se tendrá un muy buen ajuste y un modelo parsimonioso, pero no se estarán considerando las condiciones de no-arbitraje.

De acuerdo con Piazzesi (2010), la principal ventaja de los modelos afines es su trazabilidad. El que los rendimientos de los bonos tengan soluciones manejables es muy útil porque, de otra manera, tendrían que ser calculados con métodos Monte Carlo o con Ecuaciones Diferenciales Parciales; los cuales, son computacionalmente costosos, en especial si se utilizan datos panel. Sin embargo, a cambio de la trazabilidad se deben imponer supuestos restrictivos. La forma funcional del rendimiento de los bonos se obtiene del cálculo de las expectativas ajustadas por riesgo de las futuras tasas de interés a corto plazo. Por ello, los supuestos restrictivos tienen que hacerse sobre la dinámica del vector de estado ajustado por el riesgo. Más concretamente, el proceso ajustado por riesgo para el vector de estado necesita ser una difusión afín. Por ello,

varios autores como Ang y Piazzesi (2003), Gimeno y Marqués (2009), así como Elizondo (2013) asumen que el precio del riesgo del mercado es variante en el tiempo y afín a todas las variables de estado.

Si bien la utilidad de los modelos afines se concentra en el área de finanzas, sus aplicaciones dentro de la misma son múltiples. Una gran parte de la literatura se concentra en pronosticar tanto las tasas de corto plazo, como la dinámica de la estructura temporal de tasas de interés (por ejemplo Ang y Piazzesi (2003), Gimeno y Marqués (2009)). A diferencia de los modelos econométricos sencillos como los AR(p) o VAR(p) que son utilizados para pronóstico, los modelos afines con la condición de no-arbitraje tienen la bondad de que con ellos se pueden realizar pronósticos para vencimientos que no hayan sido incluidos en la estimación del modelo como en Elizondo (2013). Además, algunos autores han utilizado los modelos afines para pronosticar variables macroeconómicas. Por ejemplo, Gimeno y Marqués (2009) incorporan la inflación como un factor adicional y utilizan la estructura del modelo afín para predecir cambios en la inflación futura; o bien, Ang et al. (2006) quienes incorporan el PIB como factor observable para modelar la dinámica conjunta de éste con las tasas de interés. Una segunda aplicación de estos modelos es la fijación de precios de activos financieros como Bonos, Opciones y Swaps (Singleton y Umantsev, 2002). Aplicaciones más complejas se tienen, por ejemplo, en Aguilar-Argaez et al. (2016) quienes estiman la expectativa promedio de la inflación en n periodos mediante un modelo afín de la ETTI en México para posteriormente analizar la compensación por inflación esperada y riesgo inflacionario implícita en las cotizaciones de instrumentos financieros de largo plazo en México; o en Ang et al. (2008), quienes desarrollan un modelo de estructura temporal con cambios de régimen, precios de riesgo variantes en el tiempo e inflación para identificar hechos estilizados sobre las tasas reales, expectativas de inflación y prima de riesgo inflacionaria con el fin de determinar la importancia de estos factores en la dinámica de la curva de rendimientos nominales.

3. Metodología

El modelo afín con condición de no arbitraje y aversión al riesgo ha sido ampliamente estudiado en la literatura. En esta sección sólo se presentan las características más relevantes y el proceso de estimación.¹

3.1. El Modelo Afín

El primer paso en la estimación de los modelos afines consiste en la definición de los factores, los cuales pueden ser observables, latentes o bien, tanto observables como latentes. Para el caso específico de la curva de rendimientos en México, se le han asociado tres factores dentro de la literatura: el nivel, la pendiente y la curvatura (Cortés et al., 2008).² Cuando el modelo contiene variables latentes, la estimación de éstos se puede realizar vía el Filtro de Kalman, mientras que si el modelo contiene variables observables, la estimación se realiza comúnmente con ACP.³ Se denota por $x_t = [x_t^O, x_t^L]'$ el vector de los k estados (factores) del modelo al tiempo t , donde x_t^O corresponde a los k_1 factores observables y x_t^L a los k_2 factores latentes tal que $k = k_1 + k_2$.

Dado que las k variables de estado se obtienen a partir de datos exógenos, es necesario asumir una dinámica para las mismas. Como segundo paso, se utiliza un VAR(1) Gaussiano para modelar la dinámica de x_t ; es decir,

$$x_t = c + \Phi x_{t-1} + \Sigma \varepsilon_t, \quad (1)$$

con Φ la matriz de coeficientes autorregresivos de dimensión $k \times k$, y $\Sigma = QQ'$ la matriz de dimensión $k \times k$ de covarianzas del término de error ε_t , donde $\varepsilon_t \sim N_k(0, I)$. Con una partición

¹La metodología y los temas asociados han sido desarrollados a profundidad en Lelo-de Larrea (2018) para servir como referencia en caso de ser necesario

²Empíricamente estos factores se pueden definir como: $nivel := \frac{1}{3}(y_t^{cp} + y_t^{mp} + y_t^{lp})$, $pendiente := y_t^{lp} - y_t^{cp}$ y $curvatura := y_t^{cp} - 2y_t^{mp} + y_t^{lp}$, donde y_t^{cp} corresponde a la tasa de interés de corto plazo, y_t^{mp} a la tasa interés de mediano plazo y y_t^{lp} a la tasa de interés de largo plazo. Ver Cortés et al. (2008) para más detalle.

³La tabla 15 en el apéndice A muestra las ecuaciones del Filtro de Kalman aplicadas al modelo afín con factores latentes.

en componentes observables y no observables, la dinámica en (1) puede reescribirse como

$$\begin{bmatrix} x_t^o \\ x_t^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^o \\ c^L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & \Phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1}^o \\ x_{t-1}^L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_3 & \Sigma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t^o \\ \varepsilon_t^L \end{bmatrix}.$$

Asumiendo que los factores observables y los factores latentes son linealmente independientes, debe cumplirse que $\Phi_2 = \Phi_3 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = 0$, $\Phi_1 := \Phi^o$, $\Phi_4 := \Phi^L$, $\Sigma_1 := \Sigma^o$, $\Sigma_4 := \Sigma^L$.

Como tercer paso, se asume una relación afín entre la tasa de corto plazo y los factores, i.e.

$$r_t = \alpha_0 + \alpha_1' x_t = \alpha_0 + \begin{bmatrix} \alpha_1^{o'} & \alpha_1^{L'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t^o \\ x_t^L \end{bmatrix} = \alpha_0 + \alpha_1^{o'} x_t^o + \alpha_1^{L'} x_t^L,$$

donde r_t corresponde a la tasa de corto plazo al tiempo t .⁴

Dentro de la teoría económica, generalmente se asume que los individuos son aversos al riesgo. En este sentido, como cuarto paso, es necesario incorporar al modelo una prima por riesgo. En la ecuación (1), la matriz Σ representa la varianza de los choques aleatorios del vector de estados tal que, a mayor varianza de éstos, mayor incertidumbre se ve reflejada en la tasa de interés de largo plazo. El precio del riesgo, λ_t , hace referencia a los coeficientes que traducen la matriz Σ en la prima de riesgo. En la literatura de los modelos afines, se asume que el precio del riesgo es afín a los factores al igual que las tasas de interés. Es decir, se tiene que

$$\lambda_t = \lambda_0 + \lambda_1 x_t, \quad (2)$$

Si se busca un precio de riesgo constante, entonces se debe tener que $\lambda_1 = 0$. Por el contrario, si $\lambda_1 \neq 0$, se tiene que la prima de riesgo es variante en el tiempo y su cambio está determinado por la evolución de los factores en el tiempo. Cortés et al. (2008) estudian la variación temporal del exceso de los rendimientos de los bonos y llegan a la conclusión de que, en el mercado mexicano, existen primas de riesgo variables en el tiempo.

Finalmente, al establecer la condición de no-arbitraje, $E[m_{t+1} P_{t+1}^{n-1}] = P_t^n$, es posible

⁴Es común encontrar en la literatura que r_t es el rendimiento con vencimiento a un mes; es decir, $r_t = y_t^1$.

expresar el precio de los bonos como función exponencialmente afín a las variables de estado y, por ende, expresar los rendimientos como función linealmente afín de la siguiente manera:⁵

$$y_t^n = \hat{A}_n + \hat{B}'_n x_t, \quad (3)$$

con $\hat{A}_n = -\frac{A_n}{n}$ y $\hat{B}'_n = -\frac{B'_n}{n}$; donde A_n y B_n siguen las ecuaciones en diferencia dadas por:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + B'_n(c - \Sigma\lambda_0) + \frac{1}{2}B'_n\Sigma\Sigma'B_n - \alpha_0 \\ B'_{n+1} &= B'_n(\Phi - \Sigma\lambda_1) - \alpha'_1 \end{aligned}$$

tal que $A_1 = -\alpha_0$ y $B_1 = -\alpha_1$.

Nótese que los coeficientes \hat{A}_n y \hat{B}_n se estiman de forma recursiva. Además, $n \in \{1, 2, \dots, N\}$; lo que significa que se estiman N coeficientes \hat{A} y N coeficientes \hat{B} . Además, la ecuación (3) depende únicamente de los factores y los coeficientes \hat{A}_n y \hat{B}'_n , que a su vez, dependen únicamente de los parámetros del modelo, pero no de los rendimientos conocidos. Por ello, una de las ventajas de utilizar este modelo es que se pueden estimar tasas para vencimientos que no se tienen en la muestra e incluso que no es común que se comercien en el mercado.

La estimación de los parámetros depende en gran medida del tipo de factores que se tengan. Sea p el número de rendimientos en la muestra. Así, bajo esta metodología, en un modelo de k factores se tienen que estimar $\frac{5}{2}k^2 + \frac{7}{2}k + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p + 1$ parámetros, por lo que a mayor número de factores más compleja es la estimación del modelo. Cuando se tiene un modelo que consta sólo de factores observables únicamente se utiliza la Máxima Verosimilitud de los Errores para estimar los parámetros de la ecuación del precio del riesgo, el resto se estiman vía MCO. En contraste, cuando se tiene un modelo que consta únicamente de factores latentes, la estimación tanto de los parámetros como de los factores a lo largo del tiempo se realiza vía Máxima Verosimilitud de los Errores. En ambos casos, para que el problema sea tratable y tenga solución cerrada se asume una distribución normal de los errores de ajuste.

⁵Véase Ang y Piazzesi (2003).

3.2. Pronósticos Fuera de Muestra

Una vez que se ha estimado el modelo, se realizan pronósticos fuera de muestra; es decir, se estima la curva de rendimientos para el tiempo $t + h$ con $h = 1, 2, \dots, H$. Para conservar la estructura afín, se considera el método dinámico o iterativo, el cual consiste en obtener de forma recursiva el pronóstico para $y_{t+h}^n = \hat{A}_n + \hat{B}'_n x_{t+h} + v_{t+h}$ a partir de la información recolectada del periodo muestral. El criterio de optimalidad para pronósticos consiste en minimizar la RECM del error de pronóstico, de tal forma que el pronóstico óptimo está dado por la media del rendimiento al tiempo $t + h$, condicional a la información recolectada en el periodo muestral (I_t). Esto es,

$$\hat{y}_{t+h}^n = E_t[y_{t+h}|I_t] = E_t[y_{t+h}|y_t^n, y_{t-1}^n, \dots, y_1^n, x_t^n, x_{t-1}^n, \dots, x_1^n] = \hat{A}_n + \hat{B}'_n \hat{x}_{t+h}$$

con \hat{x}_{t+h} el pronóstico fuera de muestra de los factores dado por

$$\hat{x}_{t+h} = E_t[x_{t+h}|I_t] = E_t[c + \Phi x_{t+h-1} + \Sigma \varepsilon_{t+h}|I_t] = (I + \Phi + \Phi^2 + \dots + \Phi^{h-1})c + \Phi^h x_t.$$

4. Aplicación de la Metodología Para la ETTI de México

4.1. Definición de las Distintas Especificaciones del Modelo Afín

En esta sección se aplica la metodología de los modelos afines para realizar pronósticos, dentro y fuera de muestra, de la ETTI en México utilizando distintas especificaciones del modelo afín y comparar los resultados obtenidos. La comparación se realiza de forma gráfica, así como utilizando el criterio del error de pronóstico, medido como la Raíz del Error Cuadrático Medio (RECM), y la prueba Harvey et al. (1997) para comparación de pronósticos.

Las especificaciones tradicionalmente utilizadas en la literatura para estudiar la curva de rendimientos son el modelo afín con factores observables y el modelo afín con factores latentes. Además, es común utilizar tres factores para ambas especificaciones. De esta manera, el primer modelo a estimar, **Modelo Observable**, utilizará el nivel, la pendiente y la curvatura

de la curva de rendimientos como factores observables. Éstos serán estimados vía ACP. El segundo modelo, **Modelo Latente**, utilizará el algoritmo del filtro de Kalman para estimar tres factores los cuales serán considerados como latentes e, idealmente, se espera que coincidan con las definiciones empíricas de nivel, pendiente y curvatura.

A lo largo del tiempo ha sido evidente la relación que existe entre algunas de las variables macroeconómicas y los rendimientos de los bonos. Es razonable pensar que, si se incorporan variables macroeconómicas a los modelos tradicionales, las estimaciones y los pronósticos de éstos mejorarán gracias a la información adicional que aportan dichas variables sobre el contexto económico. De hecho, autores como Ang y Piazzesi (2003) incorporaron el Índice de Precios al Consumidor, el Índice de Precios al Productor y los precios de commodities para obtener un factor inflacionario, así como el *Help-Wanted Advertising Index (HWAI)* y las tasas de desempleo, de empleo y de crecimiento de la producción industrial para obtener un factor de la actividad real e incorporar ambos factores como observables en el estudio de la ETTI para Estados Unidos. Estos autores encuentran que las variables macroeconómicas explican una proporción significativa de la variación en los extremos de corto y mediano plazo de la curva de rendimientos y que ayudan a mejorar los pronósticos fuera de muestra. Similarmente, Dewachter et al. (2006), Diebold et al. (2006), Ang et al. (2008) y Gimeno y Marqués (2009) incorporan la inflación como factor observable en sus modelos. Además, Ang et al. (2006) incorporan el PIB de Estados Unidos como factor observable para modelar la dinámica conjunta del mismo y la curva de rendimientos encontrando que se mejoran los pronósticos obtenidos vía MCO.

Existen otros estudios que analizan la relación entre variables macroeconómicas y las tasas de interés aunque con metodologías distintas. Por ejemplo, Chen y Tsang (2013) relacionan las tasas de interés con el tipo de cambio para Inglaterra, Canadá, Japón y Estados Unidos para capturar las expectativas del mercado. Por su parte, Kilian y Lewis (2011) relacionan el precio de los commodities, el precio del petróleo, la actividad real, la inflación y la tasa de Fondos Federales para medir la respuesta de la FED ante choques en el precio del petróleo.

En este sentido, esta investigación incorpora algunas variables macroeconómicas a los modelos afines tradicionales. En particular se utiliza el VIX como medida de incertidumbre,

el precio del petróleo WTI, el tipo de cambio peso-dólar americano, el INPC y el PIB para extraer tres factores macroeconómicos. Cabe mencionar que si bien en la literatura no es común incorporar el precio del petróleo, el tipo de cambio y la volatilidad en el análisis de la curva de rendimientos, para el caso de México se ha observado que movimientos en el Índice de Volatilidad de Estados Unidos generalmente tienen gran impacto en la economía mexicana y que, tanto el tipo de cambio como el precio del petróleo, han ganado relevancia en los mercados financieros desde el 2014.

De esta manera, el tercer modelo, **Modelo Obs-Macro** toma como observables los factores nivel, pendiente y curvatura, además de tres factores adicionales: el VIX, el WTI y “Entorno-Macro”; éste último se obtiene a partir del ACP aplicado a la variación mensual de tipo de cambio, del INPC y del PIB. Finalmente, el cuarto modelo a estimar corresponde a un modelo latente aumentado con variables macroeconómicas. Análogo al tercer modelo, se incorporan el VIX, el WTI y el Entorno-Macro como variables de entrada. Así, el **Modelo Latente-Macro** utiliza seis factores no observables que, en el caso ideal, se esperarían correspondieran al nivel, pendiente y curvatura y a las variables macroeconómicas incorporadas. Los seis factores son estimados vía el filtro de Kalman al igual que en el segundo modelo.

4.2. Datos

Se obtuvieron datos diarios de los rendimientos nominales de los BCC para México con vencimientos de un día; uno, tres y seis meses; uno, dos, tres, cinco, siete y diez años; así como datos diarios del VIX, del precio del WTI y del tipo de cambio Fix (USDMXN). Además, se obtuvieron datos mensuales del INPC y datos trimestrales del PIB. La tabla 16 en el apéndice B resume las fuentes de información. Se cuenta con 186 observaciones mensuales para las 15 series del 1° de enero del 2002 hasta el 30 de junio del 2017.⁶ Se elige este periodo porque, de acuerdo con Cortés et al. (2008), a partir de mediados del 2001 la inflación en México pasó a ser un proceso estacionario. La muestra se divide en dos partes: la primera utiliza el periodo

⁶Se obtuvieron 4044 observaciones diarias para las series de los rendimientos, del VIX, del WTI y del tipo de cambio. Éstas se convierten a periodicidad mensual tomando en cuenta el promedio únicamente de los días en que sí se reportó una observación. Para convertir la serie trimestral del PIB a mensual, se repite el dato los tres meses que incluye el respectivo trimestre.

Tabla 1: Matriz de correlaciones de los rendimientos de los bonos y variables macroeconómicas.

	Tasa 0 meses	Tasa 1 meses	Tasa 3 meses	Tasa 6 meses	Tasa 12 meses	Tasa 24 meses	Tasa 36 meses	Tasa 60 meses	Tasa 84 meses	Tasa 120 meses	VIX	WTI	USDMXN	INPC	PIB
Tasa 0 meses	1.000	0.998	0.993	0.981	0.963	0.926	0.889	0.836	0.795	0.759	0.145	-0.373	-0.498	-0.713	-0.649
Tasa 1 meses	0.998	1.000	0.997	0.988	0.973	0.939	0.904	0.852	0.812	0.778	0.156	-0.387	-0.496	-0.720	-0.658
Tasa 3 meses	0.993	0.997	1.000	0.996	0.985	0.956	0.924	0.875	0.838	0.805	0.160	-0.415	-0.497	-0.735	-0.673
Tasa 6 meses	0.981	0.988	0.996	1.000	0.996	0.976	0.949	0.904	0.869	0.835	0.167	-0.444	-0.511	-0.759	-0.699
Tasa 12 meses	0.963	0.973	0.985	0.996	1.000	0.990	0.969	0.930	0.896	0.863	0.174	-0.475	-0.519	-0.779	-0.723
Tasa 24 meses	0.926	0.939	0.956	0.976	0.990	1.000	0.989	0.961	0.935	0.905	0.164	-0.527	-0.536	-0.811	-0.763
Tasa 36 meses	0.889	0.904	0.924	0.949	0.969	0.989	1.000	0.986	0.967	0.941	0.185	-0.566	-0.542	-0.828	-0.797
Tasa 60 meses	0.836	0.852	0.875	0.904	0.930	0.961	0.986	1.000	0.992	0.975	0.230	-0.587	-0.549	-0.836	-0.826
Tasa 84 meses	0.795	0.812	0.838	0.869	0.896	0.935	0.967	0.992	1.000	0.991	0.228	-0.607	-0.558	-0.850	-0.850
Tasa 120 meses	0.759	0.778	0.805	0.835	0.863	0.905	0.941	0.975	0.991	1.000	0.227	-0.579	-0.549	-0.834	-0.844
VIX	0.145	0.156	0.160	0.167	0.174	0.164	0.185	0.230	0.228	0.227	1.000	-0.068	-0.113	-0.204	-0.271
WTI	-0.373	-0.387	-0.415	-0.444	-0.475	-0.527	-0.566	-0.587	-0.607	-0.579	-0.068	1.000	-0.035	0.414	0.440
USDMXN	-0.498	-0.496	-0.497	-0.511	-0.519	-0.536	-0.542	-0.549	-0.558	-0.549	-0.113	-0.035	1.000	0.849	0.811
INPC	-0.713	-0.720	-0.735	-0.759	-0.779	-0.811	-0.828	-0.836	-0.850	-0.834	-0.204	0.414	0.849	1.000	0.978
PIB	-0.649	-0.658	-0.673	-0.699	-0.723	-0.763	-0.797	-0.826	-0.850	-0.844	-0.271	0.440	0.811	0.978	1.000

Nota: En negritas se muestran aquellas correlaciones mayores o iguales a 0.6.

Fuente: Cálculos propios con datos de Banco de México, Bloomberg, INEGI y Valmer.

que va del 1° de enero del 2002 al 31 de diciembre del 2016 para estimar los parámetros del modelo y realizar los pronósticos dentro de muestra; la segunda utiliza el periodo que va del 1° de enero del 2017 al 30 de junio del 2017 para evaluar los pronósticos fuera de muestra. Ver fuentes de información en la tabla 16 en el apéndice B.

La tabla 1 muestra la correlación entre las series que se estudian. No es sorprendente que la correlación entre las series de los rendimientos de los Bonos Cupón Cero (BCC) sea positiva y alta. Sin embargo, ésta disminuye conforme aumenta la diferencia entre el vencimiento de los bonos. En contraste, la serie del VIX no muestra una correlación alta con los BCC ni con el resto de las variables macroeconómicas. Para el WTI, la correlación con los BCC es negativa y aumenta (en valor absoluto) conforme aumenta el vencimiento, a excepción del rendimiento de 120 meses. Es decir, el WTI parece tener mayor relación con el extremo de largo plazo de la curva de rendimientos. El tipo de cambio tiene una correlación negativa no tan alta con todos los rendimientos; sin embargo, tanto el INPC como el PIB sí tienen una correlación muy alta y negativa con los mismos. Respecto al resto de las variables macroeconómicas, tanto el WTI como el tipo de cambio tienen una correlación positiva con el INPC y con el PIB siendo la correlación del tipo de cambio con estas variables mucho más alta. Finalmente, las series del INPC y del PIB tienen una correlación mayor a 0.9.

4.3. Estructura Temporal de Tasas de Interés (ETTI)

Como se menciona en Cortés et al. (2008), “la estabilidad macroeconómica, junto con una importante evolución de la regulación, han sido clave para fomentar el desarrollo del sector financiero y, en especial, del mercado de los bonos”. Por ello, es interesante estudiar el desarrollo que dicho mercado ha tenido en los últimos años. La figura 1 muestra los BCC estudiados, así como el rendimiento promedio de los mismos (línea roja punteada). Los rendimientos para aquellos bonos con vencimiento de corto plazo son muy similares y, en general, el rendimiento de los BCC disminuyó considerablemente hasta el tercer trimestre del 2016, seguido de un incremento importante hacia el final de la muestra. Por otra parte, los rendimientos de largo plazo han disminuido en mayor medida que los de corto plazo, lo cual está en línea con el aplanamiento de la curva de rendimientos.

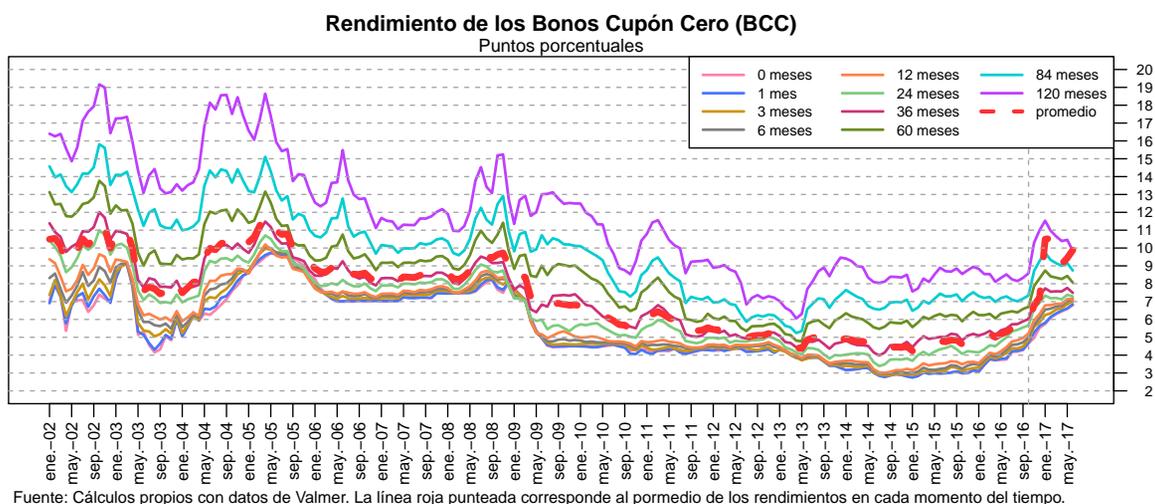


Figura 1: Evolución de las tasas de los BCC.

La tabla 2 muestra algunas estadísticas descriptivas de los BCC que ayudan a reforzar las observaciones anteriores y destacan algunos hechos estilizados de la ETTI. La media del rendimiento de los bonos se incrementa con el vencimiento de los mismos, dando lugar a una pendiente promedio positiva de la curva de rendimientos. De igual forma, la desviación estándar crece con el vencimiento.

El sexto y séptimo renglones de la tabla 2 muestran el valor del coeficiente de sesgo y un criterio de significancia del mismo. Dicho coeficiente es positivo y menor a 0.5 para todos los BCC y su criterio de significancia menor a uno (excepto para la tasa de 120 meses); por lo que se concluye que la distribución de los rendimientos es simétrica. Los renglones ocho y nueve de la tabla 2 indican el valor del coeficiente de curtosis y su criterio de significancia. Todos los vencimientos tienen un coeficiente de curtosis negativo y mayor a uno (en valor absoluto), salvo la tasa a 10 años; sin embargo, el criterio de significancia es menor a uno. Por lo tanto, se concluye que la distribución de los BCC tiene la forma de una normal.⁷

Los valores r_1 , r_6 , r_{12} , r_{18} y r_{24} muestran el valor de la autocorrelación muestral de uno, seis, 12, 18 y 24 meses respectivamente para los BCC. El rendimiento de los BCC está fuertemente correlacionado con el rendimiento del mes anterior y con el de los seis meses

⁷De acuerdo con Piazzesi (2010) es a partir de los últimos años que los bonos comienzan a mostrar este comportamiento pues históricamente los bonos no tenían una distribución normal, lo que dificultaba el cálculo del valor esperado de las tasas de corto plazo ajustadas por riesgo.

anteriores. Posteriormente, la autocorrelación sigue siendo alta pero disminuye conforme aumenta el número de rezagos. Por su parte, los valores f_1 , f_6 , f_{12} , f_{18} y f_{24} muestran el valor de la autocorrelación parcial de uno, seis, 12, 18 y 24 meses respectivamente.⁸ De estos valores se puede concluir que al aislar los efectos intermedios, la única autocorrelación de importancia para todas las tasas es la de un mes.

Tabla 2: Estadísticas descriptivas de la ETTI.

	Tasa 0 meses	Tasa 1 meses	Tasa 3 meses	Tasa 6 meses	Tasa 12 meses	Tasa 24 meses	Tasa 36 meses	Tasa 60 meses	Tasa 84 meses	Tasa 120 meses
Media	5.60	5.61	5.77	5.94	6.10	6.66	7.28	8.49	9.74	11.68
Mediana	4.96	5.00	5.26	5.65	5.93	6.92	7.45	8.76	9.80	11.39
Desv. Est.	1.94	1.94	1.96	1.98	2.00	2.07	2.10	2.30	2.64	3.25
Min	2.76	2.74	2.88	2.97	3.01	3.39	3.98	4.77	5.24	6.06
Max	9.71	9.74	9.97	10.12	10.20	10.99	12.01	13.77	15.81	19.17
Sesgo	0.33	0.29	0.26	0.20	0.18	0.23	0.27	0.30	0.33	0.48
Criterio Sig. Sesgo	0.92	0.82	0.72	0.55	0.51	0.65	0.75	0.83	0.93	1.34
Curtosis	-1.10	-1.16	-1.20	-1.29	-1.33	-1.23	-1.10	-1.01	-0.98	-0.73
Criterio Sig. Curtosis	-1.56	-1.64	-1.70	-1.82	-1.87	-1.73	-1.55	-1.43	-1.38	-1.02
r_1	0.97	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.97	0.97	0.97	0.97
r_6	0.80	0.82	0.83	0.84	0.84	0.84	0.84	0.82	0.83	0.80
r_{12}	0.63	0.63	0.63	0.64	0.65	0.67	0.69	0.68	0.70	0.65
r_{18}	0.48	0.49	0.51	0.53	0.54	0.58	0.60	0.60	0.62	0.58
r_{24}	0.46	0.47	0.49	0.51	0.52	0.57	0.58	0.58	0.59	0.56
f_1	0.97	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.97	0.97	0.97	0.97
f_6	-0.02	-0.08	-0.15	-0.15	-0.08	-0.05	-0.01	0.00	0.01	0.04
f_{12}	-0.08	-0.08	-0.06	0.02	0.07	0.11	0.10	0.08	0.08	0.07
f_{18}	0.07	0.03	0.01	0.07	0.06	0.04	0.02	0.06	0.09	0.08
f_{24}	0.01	-0.03	-0.01	0.02	-0.01	0.01	0.06	0.06	0.07	0.06

Fuente: Cálculos propios con datos de Valmer.

4.4. Variables Macroeconómicas

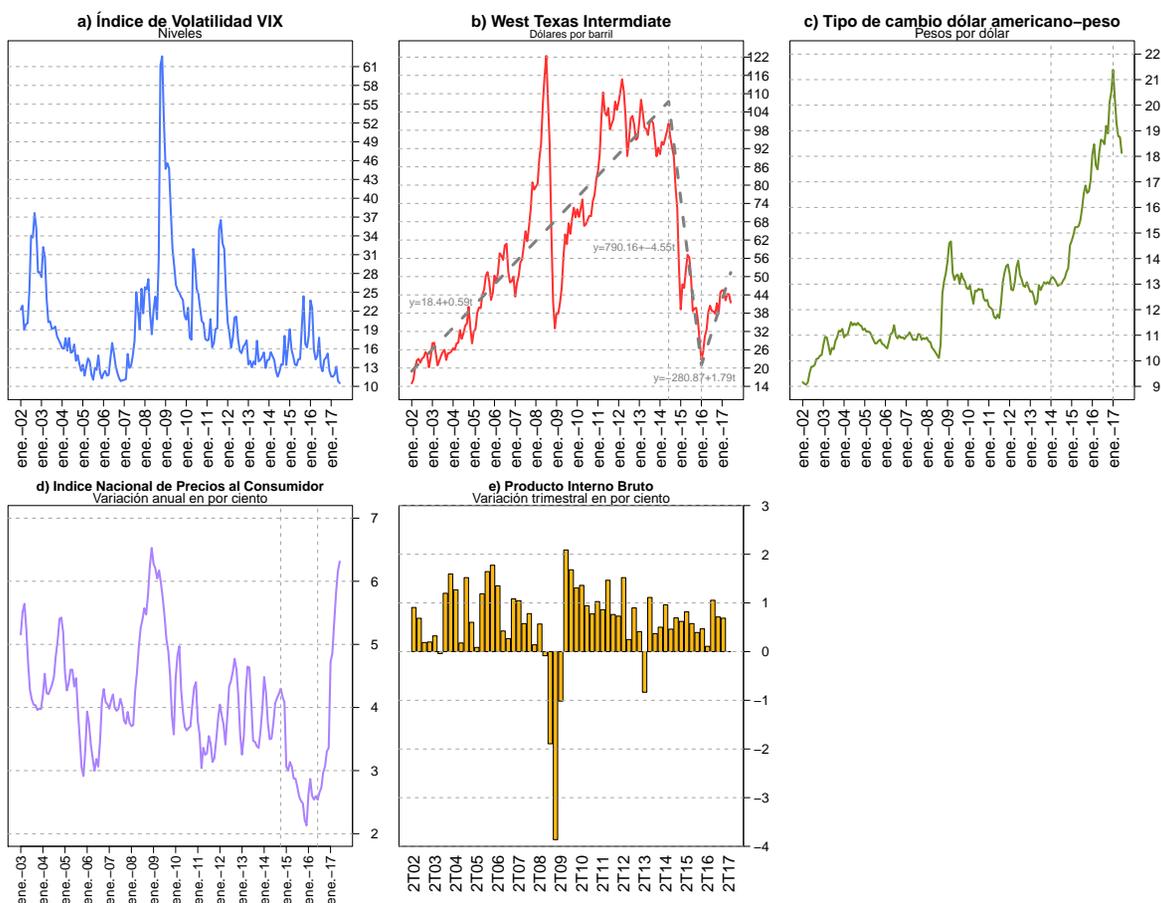
La tabla 3 muestra estadísticas descriptivas de las cinco variables macroeconómicas. Además, la figura 2 a) muestra el VIX durante el periodo muestral. La volatilidad presenta un gran pico en la crisis financiera del 2008. La figura 2 b) muestra el precio del WTI. La línea gris punteada muestra que, en el periodo enero 2002 - junio 2014, el precio del petróleo mostraba una tendencia creciente con un pico y un valle en el 2008. Sin embargo, a partir de

⁸A diferencia de la Función de Autocorrelación (FAC), la Función de Autocorrelación Parcial (FACP) de orden k es la correlación lineal entre las series de tiempo Y_t y Y_{t-k} aislando el efecto de $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-(k-1)}$.

Tabla 3: Estadísticas descriptivas de las variables macroeconómicas.

	VIX	WTI	USDMXN	INPC	PIB
Media	19.569	60.688	12.756	94.912	12.376
Mediana	17.095	53.696	12.364	94.509	12.241
Desv. Est.	8.676	28.918	2.570	16.953	1.342
E.E. Media	0.636	2.120	0.188	1.243	0.098
IC95 % Media	1.255	4.183	0.372	2.452	0.194
No. Obs	186	186	186	186	186
Min	10.514	14.980	9.071	67.711	10.137
Max	62.639	122.398	21.385	126.408	14.690
r_1	0.888	0.972	0.964	0.983	0.982
r_6	0.419	0.751	0.736	0.899	0.890
r_{12}	0.232	0.607	0.539	0.811	0.779
r_{18}	0.104	0.451	0.369	0.716	0.667
r_{24}	-0.049	0.367	0.282	0.655	0.591
f_1	0.889	0.973	0.973	0.983	0.983
f_6	-0.068	0.021	-0.064	0.003	-0.010
f_{12}	0.013	-0.020	-0.109	-0.010	-0.010
f_{18}	0.092	0.011	0.027	-0.004	-0.011
f_{24}	0.050	0.025	-0.001	-0.013	-0.012

Fuente: Cálculos propios con datos de Banco de México, Bloomberg e INEGI.



Fuente: Cálculos propios con datos de Banco de México, Bloomberg e INEGI. La línea gris punteada corresponde a la tendencia.

Figura 2: Evolución de las variables macroeconómicas.

junio del 2014 y hasta finales del 2015, el precio del petróleo mostró una fuerte caída en parte gracias al incremento de la oferta (dado por el aumento en el volumen de producción de la OPEP), así como por la reducción de la demanda (dado por el bajo crecimiento económico mundial). A pesar de esto, pareciera que la disminución en el precio del crudo se está revirtiendo desde enero del 2016. Por su parte, la figura 2 c) muestra la serie de tiempo para el tipo de cambio nominal peso - dólar americano. Si bien el peso mexicano muestra una tendencia de depreciación, el incremento en el tipo de cambio se acentuó en enero del 2014. Desde esta fecha y hasta diciembre del 2016, el peso mexicano acumuló una depreciación del 46.80%. Sin embargo, desde principios del 2017 y hasta el segundo semestre del mismo año, el peso se ha recuperado llegando alrededor de los \$18.5 pesos por dólar. La figura 2 d) muestra la variación anual del INPC, es decir la inflación anual. De enero del 2003 al tercer trimestre del 2014 (excluyendo la crisis del 2008) la inflación anual en México oscilaba entre el tres y cinco por ciento. A partir del cuarto trimestre del 2014, la inflación disminuyó significativamente hasta alcanzar su mínimo histórico, por debajo de la meta de inflación del tres por ciento del Banco de México, en diciembre del 2015. Sin embargo, desde mediados del 2016 se ha presentado un incremento en la inflación que se espera continúe a lo largo del 2017, alcanzando niveles cercanos al seis por ciento al cierre del 2017.⁹ Finalmente, la figura 2 e) muestra la variación trimestral del PIB. Cabe mencionar que las cinco series tienen una fuerte autocorrelación parcial de primer orden; por lo tanto, la dinámica VAR asumida para los factores tiene sentido.

4.5. Modelo Observable

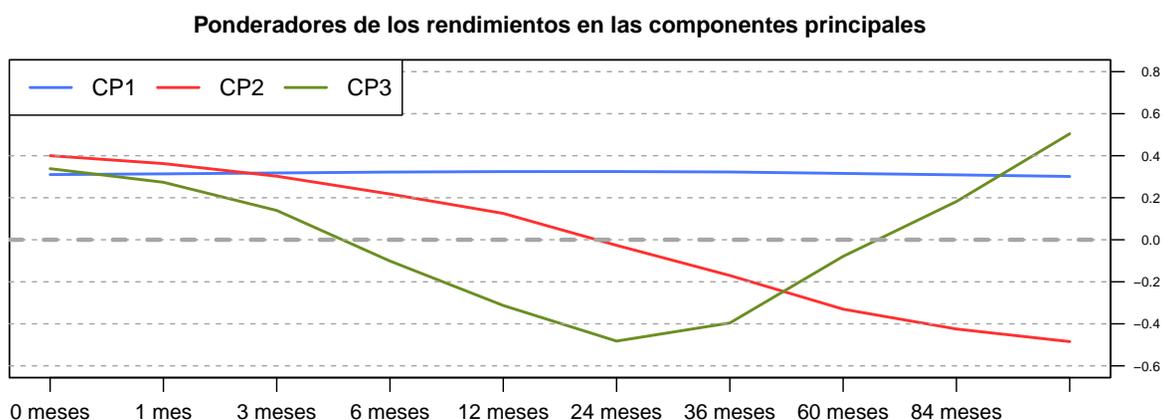
Como se muestra en la tabla 1, la correlación entre los rendimientos de los bonos es muy alta. Por ello, se utiliza el ACP para estimar los factores observables a partir de las tasas disponibles.¹⁰ Cabe destacar que las primeras dos componentes principales acumulan el 99.3%

⁹Información de acuerdo con la encuesta Citibanamex de Expectativas (primera quincena de julio 2017) y la Encuesta sobre las Expectativas de los Especialistas en Economía del Sector Privado realizada por Banco de México (junio 2017).

¹⁰Estudios como Cortés et al. (2008) y Elizondo (2013) utilizan el ACP para encontrar los factores que determinan la curva de rendimientos y demuestran que éstos coinciden con las definiciones empíricas del nivel, pendiente y curvatura. Cabe destacar que dicha herramienta no está diseñada para series de tiempo. En este sentido, sería posible utilizar un Análisis de Componentes Principales Funcionales (ACPF) que es una extensión

de la varianza de los BCC, mientras que las primeras tres componentes acumulan el 99.8% de la misma; por lo que bastaría con tomar las primeras dos para explicar la dinámica de la ETTI. Sin embargo, es común utilizar las primeras tres componentes principales porque se relacionan directamente con el nivel, la pendiente y la curvatura de la curva de rendimientos. Por ello, en el resto del análisis se utilizan como factores observables las componentes principales uno, dos y tres.

La figura 3 muestra los ponderadores de dichas componentes para cada vencimiento. El significado de cada componente principal puede encontrarse en Cortés et al. (2008) y en Elizondo (2013). Los pesos de la primer componente (CP1) son todos positivos y constantes; por lo tanto, cambios en esta última afectan por igual todos los vencimientos, generando un desplazamiento en paralelo de toda la curva de rendimientos. Es por esta razón que se le asocia directamente con el nivel. Los pesos de la segunda componente (CP2) son positivos para los vencimientos de corto plazo y negativos para los vencimientos de mediano y largo plazo. Un cambio positivo en esta componente llevará a un aumento del extremo de corto plazo de la curva de rendimientos y a una disminución del extremo de largo plazo de la misma. Por ello, movimientos en esta componente se traducen en una rotación de la curva de rendimientos y está asociada con la pendiente. Finalmente, los ponderadores de la tercer componente principal

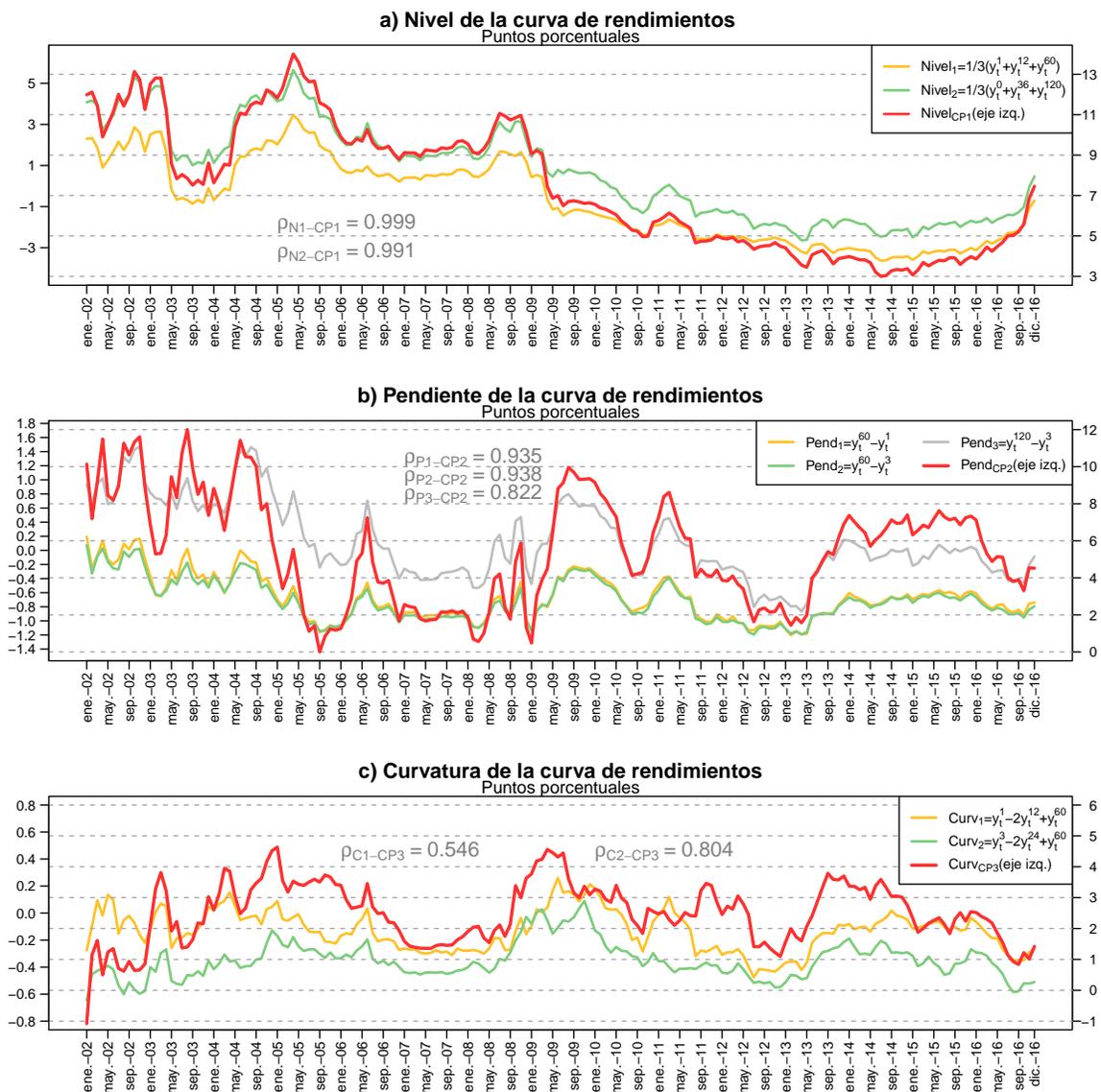


Fuente: Cálculos propios con datos de Valmer.

Figura 3: Ponderadores de los rendimientos en las componentes principales.

del ACP en el cual, las componentes principales están representadas por funciones y no por vectores. Para mayor detalle consultar Chávez et al. (2015).

(CP3) son positivos para los vencimientos de corto y largo plazo, pero negativos para los de mediano plazo (el ponderador tiene forma de “u”). Lo anterior implica que los extremos de la curva de rendimientos se muevan en dirección opuesta a los rendimientos de mediano plazo, por lo que se le asocia con la curvatura. De esta manera, la CP1 será el factor “Nivel”, la CP2 será el factor “Pendiente”, y la CP3 será el factor “Curvatura”. Ahora bien, las definiciones empíricas de nivel, pendiente y curvatura dependen de la selección de la tasa de corto, mediano y largo plazo, por lo que no son únicas. La figura 4 compara distintas definiciones con los tres



Fuente: Cálculos propios con datos de Valmer.

Figura 4: Nivel, pendiente y curvatura de la curva de rendimientos vs *proxies* empíricos.

factores estimados.¹¹ Dichas estimaciones tienen alta correlación con las definiciones empíricas y reproducen de forma correcta su comportamiento.

La tabla 17 en el apéndice C muestra los resultados de realizar la estimación de la ecuación (1) tomando como factores observables $x_t^1 := Nivel$, $x_t^2 := Pendiente$, $x_t^3 := Curvatura$.¹² El factor Nivel depende significativamente de su propio rezago y del rezago del factor Curvatura. Los factores Pendiente y Curvatura dependen significativamente sólo de sus propios rezagos. La figura 5 muestra que el VAR(1) ajusta bien a cada uno de los factores y muestran una Raíz del Error Cuadrático Medio (RECM) menor a 0.5. Sin embargo, la estimación del nivel, de la pendiente y de la curvatura están ligeramente desfasadas a la derecha de los respectivos factores obtenidos con ACP.

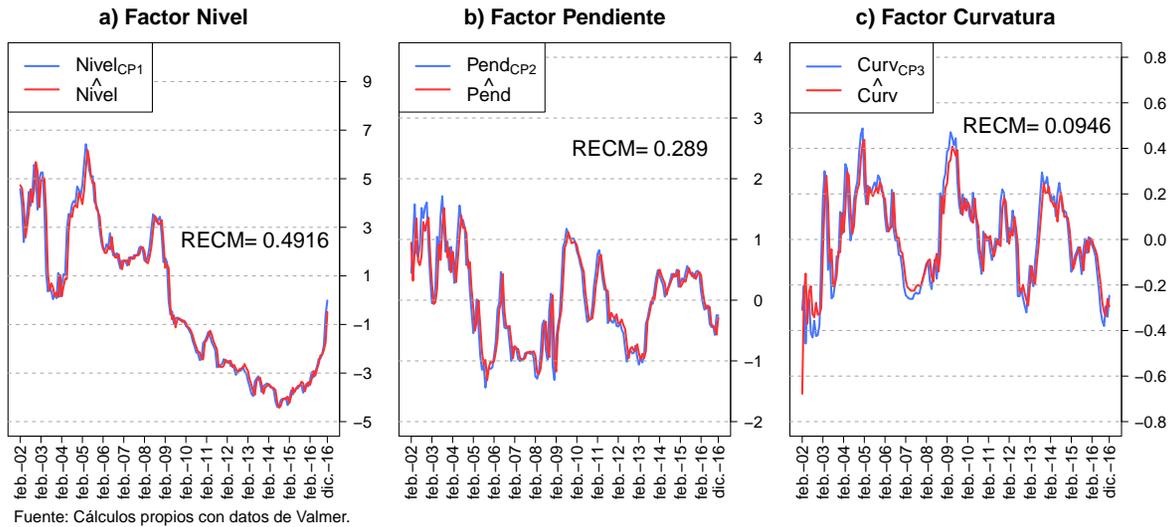


Figura 5: Ajuste de los factores con la ecuación de la dinámica de estado.

¹¹Varios autores utilizan como definición del nivel $Nivel_1 := \frac{1}{3}(y_t^1 + y_t^{12} + y_t^{60})$. Dado que en la muestra existen bonos con vencimiento menor a un mes y mayor a los 60 meses, una definición alternativa es $Nivel_2 := \frac{1}{3}(y_t^0 + y_t^{36} + y_t^{120})$. Para la pendiente, Ang y Piazzesi (2003) utilizan $Pendiente_1 := y_t^{60} - y_t^1$, mientras que Elizondo (2013) utiliza $Pendiente_2 := y_t^{60} - y_t^3$. En ambos casos, el mayor vencimiento con el que contaban estos autores era de 60 meses. Dados los datos y tomando en cuenta que para el informe trimestral de inflación el Banco de México aproxima la pendiente de la curva de rendimientos como la diferencia entre la tasa de 10 años y la tasa de tres meses, se utiliza como una tercera definición $Pendiente_3 := y_t^{120} - y_t^3$. Finalmente, para la curvatura Ang y Piazzesi (2003) utilizan $Curvatura_1 := y_t^1 - 2y_t^{12} + y_t^{60}$ y Elizondo (2013) utiliza $Curvatura_2 := y_t^3 - 2y_t^{24} + y_t^{60}$.

¹²Se realizaron las pruebas para verificar que el modelo VAR con estos tres factores es estacionario. Las raíces inversas son 0.966, 0.936 y 0.859, por lo que se encuentran dentro del círculo unitario y, en consecuencia, el VAR es estacionario.

Así, los parámetros estimados para dicha ecuación son:

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} 0.024 \\ 0.008 \\ 0.003 \end{bmatrix}; \hat{\Phi} = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.04 & 0.435 \\ -0.007 & 0.916 & -0.162 \\ -0.003 & -0.009 & 0.864 \end{bmatrix}; \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.247 & 0.018 & -0.007 \\ 0.018 & 0.085 & 0.006 \\ -0.007 & 0.006 & 0.009 \end{bmatrix}.$$

La tabla 4 muestra los resultados de estimar los parámetros de la ecuación de corto plazo utilizando el BCC con vencimiento a un mes. Un incremento de un punto porcentual en el nivel de la curva de rendimientos estará asociado a una disminución de 0.6 puntos porcentuales en la tasa de corto plazo, mientras que el mismo incremento pero en la pendiente (curvatura) estará asociado a un incremento de 0.71(0.53) puntos porcentuales en dicha tasa.¹³

Tabla 4: Estimación de los parámetros de la ecuación de corto plazo.

	Coefficiente	Error Est.	Valor Est. t	valor-p	Signif.
α_0	5.587	0.004	1460.405	0.000	***
Nivel (α_1^1)	-0.616	0.001	-490.793	0.000	***
Pendiente (α_1^2)	0.712	0.005	141.128	0.000	***
Curvatura (α_1^3)	0.537	0.017	31.218	0.000	***
R^2	0.999				
$R^2 a just.$	0.999				

Código de significancia: 0.001 – >'***', 0.01 – >'**', 0.05 – >'*', 0.1 – >'.', No signif – >' '

Fuente: Cálculos propios con datos de Valmer.

Para realizar la estimación de los parámetros del precio del riesgo (σ^2 , λ_0 y λ_1) se maximiza la verosimilitud de los errores utilizando el método BFGS.¹⁴ Es importante destacar que la matriz λ_1 puede tener distintas especificaciones. Por ejemplo, si se toma λ_1 como una matriz diagonal, el precio del riesgo de cada factor no se ve influenciado por el resto de los factores. También es posible utilizar una matriz triangular inferior o la matriz completa. Además, en lugar de la matriz de varianzas y covarianzas de los factores (Σ) estimada previamente, se

¹³Es importante notar que esta estimación podría sufrir del problema de regresión espuria, ya que el valor de la R^2 es muy cercano a uno y los estadísticos tienen valores t muy altos. Este problema puede derivarse del hecho de que la tasa de corto plazo, así como los factores, son series de tiempo no estacionarias. Estas relaciones no implican causalidad; no obstante, los resultados del modelo siguen siendo válidos.

¹⁴Se utiliza la función *mle* del paquete *stats4* en R. Es necesario proporcionar, en forma de función, el negativo de la log-verosimilitud y condiciones iniciales para los parámetros. A su vez, la función *mle* llama a la función *optim*, la cual se encarga de realizar la optimización vía el algoritmo de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) o algún otro método seleccionado.

puede utilizar el factor de Cholesky asociado a dicha matriz. Con la finalidad de buscar el mejor ajuste, se plantean seis especificaciones distintas para el Modelo Observable. Éstas son:

- a:** λ_1 diagonal.
- b:** λ_1 triangular inferior.
- c:** λ_1 completa.
- d:** λ_1 diagonal y factor de Cholesky para Σ .
- e:** λ_1 triangular inferior y factor de Cholesky para Σ .
- f:** λ_1 completa y factor de Cholesky para Σ .

Dado que el modelo es muy sensible a las condiciones iniciales, para cada una de estas opciones se realizó la calibración del mismo con el fin de encontrar los valores iniciales de σ^2 , λ_0 y λ_1 que den el mejor ajuste (el menor RECM promedio) para cada modelo.¹⁵ La tabla 18 en el apéndice C resume el proceso de calibración para estas especificaciones. El modelo afín con factores observables y matriz λ_1 completa es el que se ajusta mejor a los rendimientos; por lo tanto, se utiliza esta especificación para completar la estimación del modelo. De esta manera, los estimadores de los parámetros de la ecuación del precio del riesgo son:

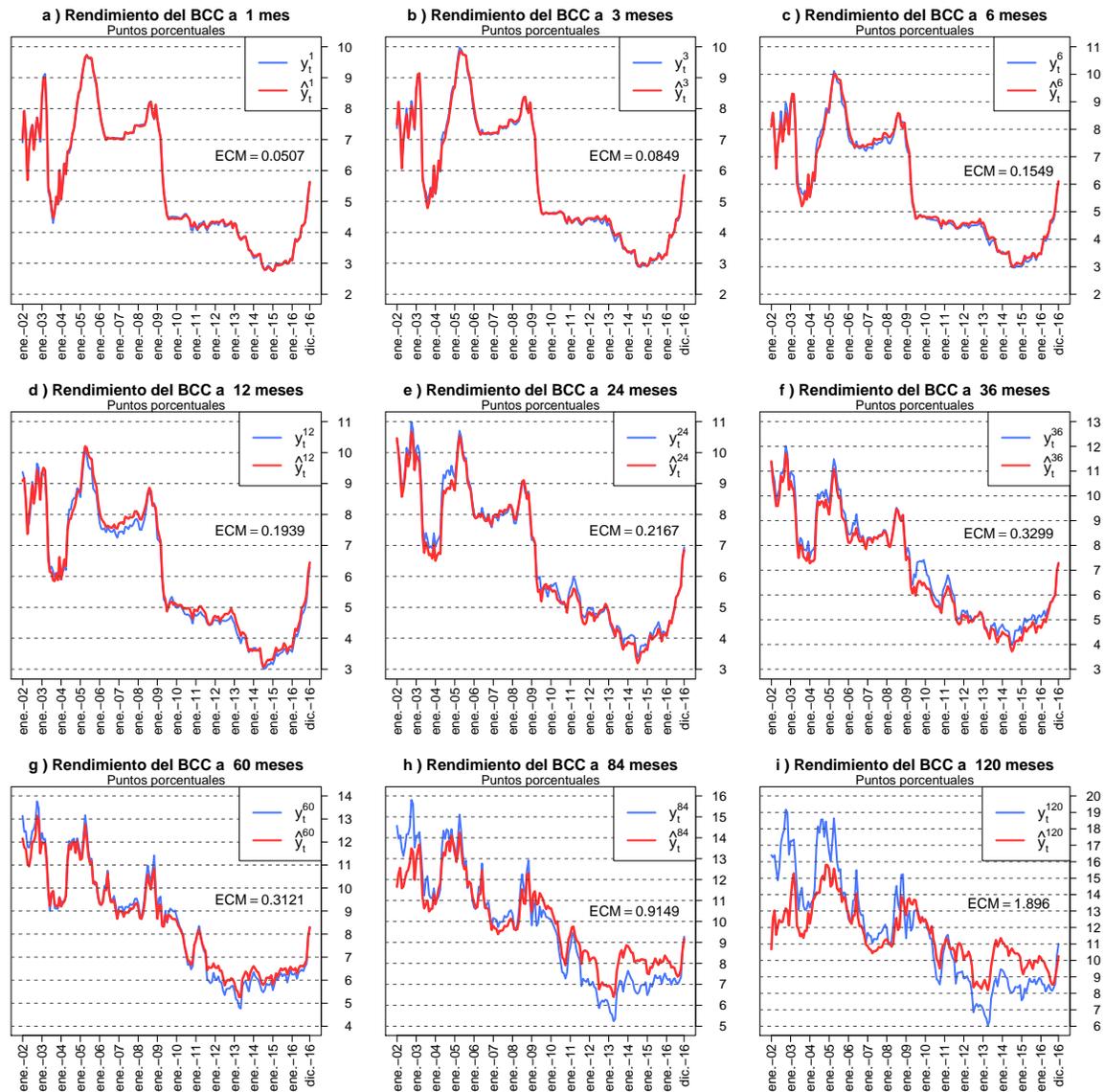
$$\hat{\sigma}^2 = 0.467 \quad \hat{\lambda}_0 = \begin{bmatrix} 2.749 \\ 9.689 \\ -23.579 \end{bmatrix} \quad \hat{\lambda}_1 = \begin{bmatrix} -0.116 & -0.096 & 0.661 \\ 0.052 & -0.737 & 1.824 \\ -0.546 & -1.127 & -14.64 \end{bmatrix}$$

La figura 6 muestra las tasas estimadas y las tasas observadas para los vencimientos en la muestra bajo la especificación **c**.¹⁶ Se observa un buen ajuste para las tasas de corto y mediano

¹⁵Cabe mencionar que se utiliza el promedio del RECM puesto que se tiene el mismo interés en las tasas de corto, mediano y largo plazo. Dependiendo de la aplicación de los modelos, sería factible ponderar los RECM dada la importancia de cada vencimiento; o bien, utilizar otro criterio de optimalidad.

¹⁶En Lelo-de Larrea (2018) se pueden encontrar las estimaciones para los distintos rendimientos en la muestra bajo el resto de las especificaciones del Modelo Observable. Las especificaciones a y b producen resultados comparables, mientras que las especificaciones con factor de Cholesky obtiene ajustes muy malos para las tasas de largo plazo.

plazo, con RECM menores a 0.35. El ajuste para las tasas de largo plazo (84 y 120 meses) es menos preciso; no obstante, sigue muy de cerca la dinámica observada.



Fuente: Cálculos propios con datos de Valmer.

Figura 6: Pronóstico dentro de muestra de los rendimientos de los BCC para el Modelo Observable c.

Una vez que se tiene calibrado el modelo afín, es posible realizar los pronósticos fuera de muestra para los rendimientos. Para obtener los pronósticos fuera de muestra, se utiliza el método dinámico, es decir $\hat{y}_{t+h} = \hat{A}_n + \hat{B}_n^t \hat{x}_{t+h}$. Para el primer mes pronosticado (enero de 2017) se utiliza el último valor observado de los factores (i.e. diciembre de 2016). Posteriormente,

los pronósticos para febrero-junio 2017 se obtienen utilizando la estimación correspondiente mediante la ecuación de la dinámica de estado de cada uno de los tres factores. Ahora bien, tanto el cálculo del RECM como de la prueba Harvey et al. (1997) contrastan el valor pronosticado por el modelo contra el valor observado de las tasas.¹⁷

La tabla 5 muestra el valor observado de las tasas de los BCC en el horizonte de pronóstico junto con los pronósticos fuera de muestra. Los pronósticos para las tasas de mediano y largo plazo (salvo por la tasa de 120 meses) son muy cercanos a los valores observados. En contraste, los pronósticos para las tasas de corto plazo no son tan buenos y muestran RECM mayores a 0.5.

Tabla 5: Pronósticos fuera de muestra de los rendimientos para el Modelo Observable.

	R0M			R3M			R6M		
	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error
ene. 2017	5.8132	5.7082	0.1049	6.2432	5.9190	0.3242	6.5495	6.1652	0.3844
feb. 2017	6.1358	5.7726	0.3632	6.3453	5.9750	0.3702	6.6053	6.2096	0.3956
mar. 2017	6.3318	5.8212	0.5106	6.5559	6.0166	0.5393	6.7209	6.2414	0.4795
abr. 2017	6.4994	5.8566	0.6428	6.6422	6.0460	0.5963	6.7794	6.2625	0.5169
may. 2017	6.6105	5.8809	0.7296	6.8473	6.0651	0.7822	7.0136	6.2746	0.7390
jun. 2017	6.8550	5.8958	0.9592	7.0259	6.0757	0.9502	7.1473	6.2793	0.8679
RECM		0.615			0.6329			0.5917	

	R12M			R24M			R36M		
	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error
ene. 2017	6.7882	6.4840	0.3042	7.3334	6.8523	0.4810	7.7402	7.2648	0.4754
feb. 2017	6.8053	6.5089	0.2964	7.1867	6.8524	0.3343	7.5524	7.2589	0.2934
mar. 2017	6.8750	6.5241	0.3509	7.2015	6.8472	0.3543	7.5750	7.2495	0.3255
abr. 2017	6.8756	6.5313	0.3443	7.1273	6.8376	0.2897	7.5690	7.2372	0.3318
may. 2017	7.1368	6.5317	0.6051	7.3827	6.8243	0.5584	7.7645	7.2225	0.5420
jun. 2017	7.1491	6.5267	0.6224	7.2828	6.8082	0.4746	7.4867	7.2059	0.2808
RECM		0.4426			0.4262			0.3875	

	R60M			R84M			R120M		
	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error
ene. 2017	8.7427	8.3276	0.4151	9.7334	9.2736	0.4598	11.5327	10.4333	1.0993
feb. 2017	8.4109	8.3539	0.0570	9.3331	9.3590	-0.0260	10.9634	10.5813	0.3821
mar. 2017	8.3374	8.3741	-0.0368	9.1508	9.4314	-0.2806	10.6528	10.7079	-0.0551
abr. 2017	8.2639	8.3891	-0.1252	9.0014	9.4925	-0.4911	10.3897	10.8160	-0.4264
may. 2017	8.4360	8.3996	0.0364	9.1549	9.5439	-0.3890	10.4576	10.9082	-0.4506
jun. 2017	8.0617	8.4062	-0.3445	8.7414	9.5867	-0.8453	9.8374	10.9866	-1.1492
RECM		0.2282			0.4827			0.7145	

Fuente: Cálculos propios con datos de Valmer.

¹⁷Cabe destacar que el pronóstico fuera de muestra también podría realizarse utilizando los valores observados de los factores en el periodo muestral en lugar de los pronosticados (método de ventana recurrente o de ventana móvil). Sin embargo, esto no permitiría medir la capacidad de pronóstico de corto plazo.

4.6. Modelo Latente

Similar al Modelo Observable, se utilizan tres factores que, idealmente, deberían corresponder al nivel, la pendiente y la curvatura de la curva de rendimientos. La estimación se obtiene con el método de Máxima Verosimilitud de los Errores.¹⁸ En este modelo también es posible tener distintas representaciones de las matrices Φ , Σ , λ_1 y R . Dado que, además de los parámetros, se estiman los tres factores a lo largo del tiempo, en el modelo latente se representa a Φ como una matriz triangular inferior, a Σ como una matriz diagonal y a R como una matriz diagonal constante. Además, la matriz λ_1 se representa en su forma completa para capturar la influencia de todos los factores en el precio del riesgo.¹⁹ Así, los parámetros estimados son:

- Covarianza del error de medida: $\hat{R} = 0.0224 I_9$
- Ecuación de la tasa de corto plazo: $\hat{\alpha}_0 = 0.1873 \quad \hat{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} -0.0118 & 0.8185 & 2.2314 \end{bmatrix}$
- Ecuación de la dinámica de estado:

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} 0.0083 \\ 0.7455 \\ 3.2266 \end{bmatrix} \quad \hat{\Phi} = \begin{bmatrix} 1.0027 & 0 & 0 \\ 0.2428 & 1.0043 & 0 \\ 1.0251 & 0.7902 & 0.9496 \end{bmatrix} \quad \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 3 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0.0195 \end{bmatrix}$$

- Ecuación del precio del riesgo:

$$\hat{\lambda}_0 = \begin{bmatrix} 1.1771 \\ 1.2401 \\ 0.1782 \end{bmatrix} \quad \hat{\lambda}_1 = \begin{bmatrix} 0.8729 & 0.5582 & -0.7869 \\ 1.8103 & -1.6556 & 0.0358 \\ 1.8125 & 2.218 & 0.612 \end{bmatrix}$$

¹⁸Se utilizó la función *fminsearch* de Matlab permitiendo un máximo de 100,000 iteraciones o 100,000 evaluaciones de la función objetivo. Para el filtro de Kalman se decide utilizar Matlab y no R por dos razones. En primer lugar, para la mayoría de los valores iniciales propuestos, el optimizador de R no llegaba a la convergencia en el número máximo de iteraciones permitidas y elevar éstas implicaba un alto costo computacional. En segundo lugar, para los valores iniciales para los que sí se logró la convergencia, los ajustes obtenidos con Matlab fueron superiores a los obtenidos con R bajo el criterio del RECM.

¹⁹Los detalles de la calibración del modelo se encuentran en el apéndice D.

La tabla 6 muestra la correlación que existe entre los factores estimados con el Filtro de Kalman y las distintas definiciones de nivel, pendiente y curvatura. Para el $Nivel_1$ y $Nivel_2$ la correlación más alta se tiene con el tercer factor. La $Pendiente_1$ y la $Pendiente_2$ tienen la correlación más alta con el segundo factor, mientras que la $Pendiente_3$ tiene la correlación más alta con el primer factor. Finalmente, ambas definiciones de curvatura tienen la correlación más alta con el primer factor. Así, se utiliza el primer factor estimado como “Curvatura”, el segundo como “Pendiente” y el tercero como “Nivel” de la curva de rendimientos. La gráfica de los factores observados y estimados es muy similar a la de la figura 4.

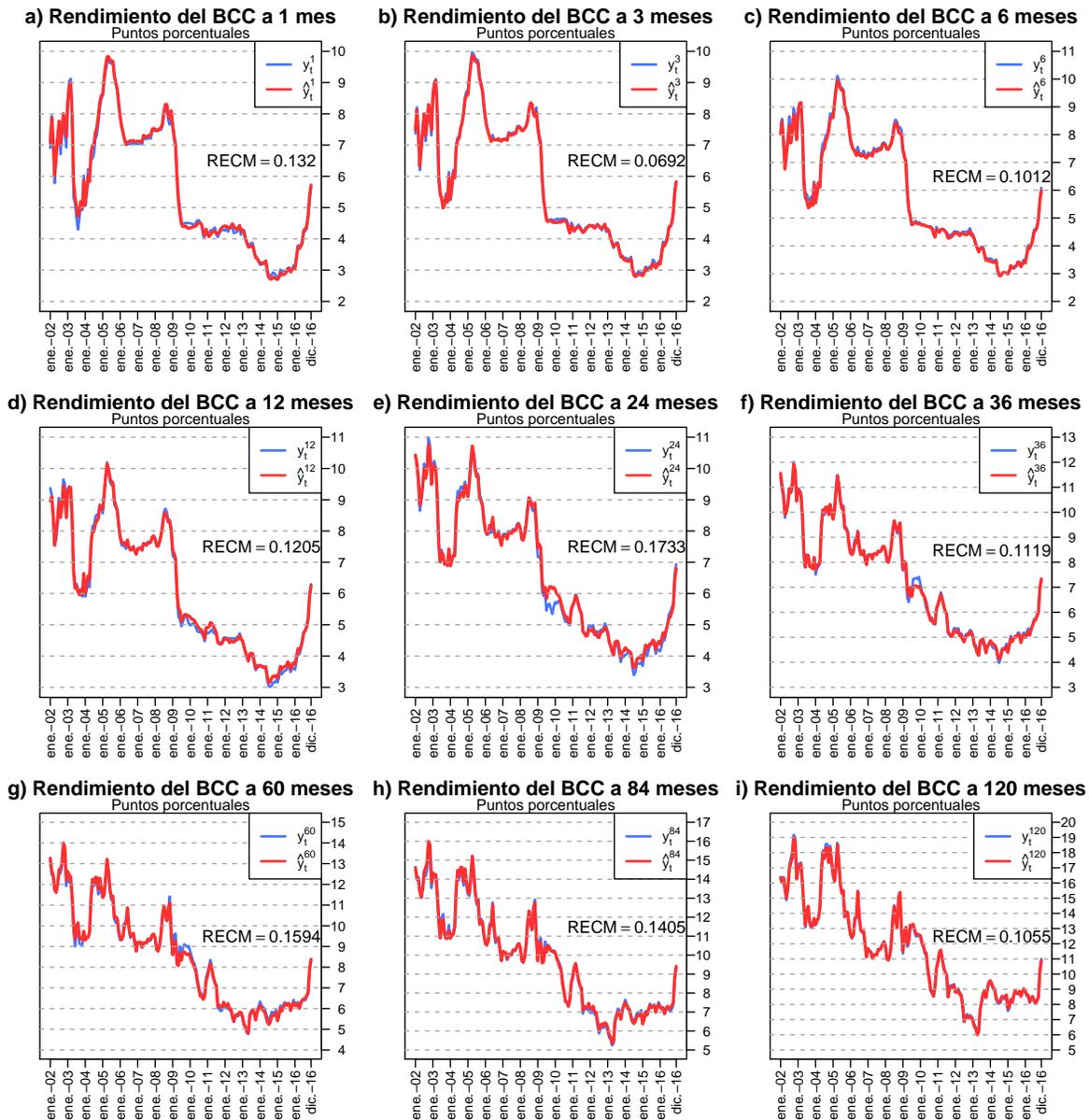
Tabla 6: Matriz de correlaciones de los factores latentes con sus definiciones empíricas.

	FK_1	FK_2	FK_3
$Nivel_1$	0.351	0.904	0.964
$Nivel_2$	0.463	0.918	0.917
$Pend_1$	0.399	0.582	0.028
$Pend_2$	0.407	0.560	0.007
$Pend_3$	0.697	0.660	0.299
$Curv_1$	0.666	0.229	0.008
$Curv_2$	0.572	-0.162	0.033

Nota: En negritas se muestran aquellas correlaciones mayores o iguales a 0.6.

Fuente: Cálculos propios con datos de Valmer.

La estimación de los rendimientos de los BCC obtenida a partir del Modelo Latente se muestra en la figura 7. El modelo se ajusta de forma excelente a todas las tasas, con RECM menores a 0.18, lo cual podría ser señal de un sobreajuste del modelo a los datos.



Fuente: Cálculos propios con datos de Valmer.

Figura 7: Ajuste de los rendimientos para el Modelo Latente.

Los pronósticos fuera de muestra, así como el valor observado de las tasas en el horizonte de pronóstico se muestran en la tabla 7. Al igual que en el Modelo Observable, se utiliza el método dinámico para obtener los pronósticos y se compara con los valores observados para su evaluación. Para las tasas de corto plazo se subestimó el verdadero valor de los rendimientos y se observan RECM mayores a 0.9. Además, las tendencias observadas son contrarias a

las esperadas por el modelo. Las tasas de mediano plazo, también están subestimadas por el modelo; no obstante, el error de pronóstico es menor que para el corto plazo. Por último, el modelo sobrestima las tasas de largo plazo sobretodo hacia el final de la muestra.

Tabla 7: Pronósticos fuera de muestra de los rendimientos para el Modelo Latente.

	R0M			R3M			R6M		
	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error
ene. 2017	5.8132	5.6572	0.1560	6.2432	5.7682	0.4750	6.5495	5.9280	0.6215
feb. 2017	6.1358	5.6015	0.5343	6.3453	5.7192	0.6261	6.6053	5.8879	0.7174
mar. 2017	6.3318	5.5521	0.7797	6.5559	5.6761	0.8798	6.7209	5.8532	0.8677
abr. 2017	6.4994	5.5087	0.9907	6.6422	5.6386	1.0036	6.7794	5.8236	0.9558
may. 2017	6.6105	5.4710	1.1395	6.8473	5.6064	1.2409	7.0136	5.7988	1.2148
jun. 2017	6.8550	5.4386	1.4164	7.0259	5.5792	1.4467	7.1473	5.7786	1.3687
RECM		0.9313			1.0026			0.993	

	R12M			R24M			R36M		
	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error
ene. 2017	6.7882	6.2302	0.5580	7.3334	6.7974	0.5360	7.7402	7.3426	0.3976
feb. 2017	6.8053	6.2049	0.6004	7.1867	6.7927	0.3940	7.5524	7.3505	0.2019
mar. 2017	6.8750	6.1842	0.6908	7.2015	6.7912	0.4103	7.5750	7.3608	0.2142
abr. 2017	6.8756	6.1676	0.7080	7.1273	6.7927	0.3346	7.5690	7.3733	0.1957
may. 2017	7.1368	6.1551	0.9817	7.3827	6.7970	0.5857	7.7645	7.3880	0.3765
jun. 2017	7.1491	6.1464	1.0027	7.2828	6.8041	0.4787	7.4867	7.4046	0.0821
RECM		0.7767			0.4646			0.2682	

	R60M			R84M			R120M		
	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error
ene. 2017	8.7427	8.4035	0.3392	9.7334	9.4324	0.3010	11.5327	10.8990	0.6337
feb. 2017	8.4109	8.4242	-0.0133	9.3331	9.4578	-0.1247	10.9634	10.9250	0.0384
mar. 2017	8.3374	8.4463	-0.1089	9.1508	9.4840	-0.3332	10.6528	10.9510	-0.2982
abr. 2017	8.2639	8.4698	-0.2059	9.0014	9.5112	-0.5098	10.3897	10.9770	-0.5873
may. 2017	8.4360	8.4946	-0.0586	9.1549	9.5392	-0.3843	10.4576	11.0040	-0.5464
jun. 2017	8.0617	8.5205	-0.4588	8.7414	9.5679	-0.8265	9.8374	11.0310	-1.1936
RECM		0.2528			0.4669			0.6532	

Fuente: Cálculos propios con datos de Valmer.

4.7. Modelo Obs-Macro

Similar al Modelo Observable, se toman los factores Nivel, Pendiente y Curvatura calculados previamente y se agregan factores a partir de las variables macroeconómicas. Agregar cinco factores macroeconómicos tendría como consecuencia la estimación de una gran cantidad de parámetros, lo que sería computacionalmente muy costoso y la ganancia en la exactitud del pronóstico podría no compensarlo. Si bien el VIX y el WTI no están altamente correlacionados con las otras variables, la correlación entre el tipo de cambio, el INPC y el PIB es alta. Por lo tanto, se aplica el ACP a la variación mensual del tipo de cambio, del INPC

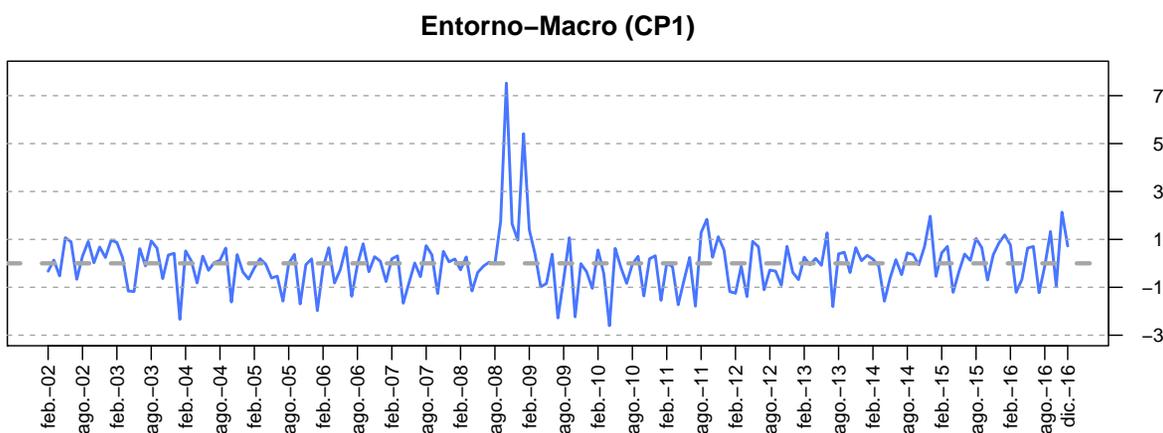
y del PIB para reducir el número de factores macroeconómicos a introducir en el modelo. La primer componente acumula una proporción de varianza del 41.85 %, mientras que las primeras dos acumulan el 74.93 %. Por ello, y buscando un modelo parsimonioso, se decide tomar únicamente la primer componente principal para el análisis.

La tabla 8 muestra los ponderadores y las correlaciones de las variables macroeconómicas con la primer componente. El ponderador es positivo para la variación en el tipo de cambio y en el INPC, pero negativo para la variación en el PIB. Esto significa que, por ejemplo, un incremento en el INPC estará ligado a un aumento en la primer componente. Análogamente, una apreciación del peso (disminución del tipo de cambio) estaría ligada a una disminución en la primer componente principal. En contraste, crecimiento económico (aumento en el PIB) se reflejaría en una disminución en dicha componente. Por su parte, la correlación entre la componente y el tipo de cambio es alta y positiva, mientras que es alta y negativa con el PIB. Por lo tanto, a este factor se le denomina “Entorno-Macro”. La figura 8 muestra la serie de tiempo de dicho factor en la que se destaca el pico durante la crisis del 2008.

Tabla 8: Ponderadores y correlaciones de la primer componente principal.

	$\Delta\%USD\text{MXN}$	$\Delta\%INPC$	$\Delta\%PIB$
Pesos	0.7006	0.2165	-0.6799
Correlación	0.785	0.243	-0.762

Fuente: Cálculos propios con datos de Banco de México, Bloomberg e INEGI.



Fuente: Cálculos propios con datos de Banco de México, Bloomberg e INEGI.

Figura 8: Serie de tiempo del factor macroeconómico.

De esta manera, para el Modelo Obs-Macro se proponen un total de seis factores observables: $x_t^1 := Nivel$, $x_t^2 := Pendiente$, $x_t^3 := Curvatura$, $x_t^4 := VIX$, $x_t^5 := WTI$, $x_t^6 := Entorno - Macro$.²⁰ La tabla 19 en el apéndice E muestra los resultados de la estimación. El factor Nivel depende significativamente de su propio rezago y de los rezagos de la Curvatura, del VIX, así como del WTI. Los factores Pendiente y Curvatura dependen significativamente sólo de sus propios rezagos. Para el factor VIX, los rezagos significativos son los del Nivel, la Curvatura, su propio rezago y el del WTI. El factor WTI depende significativamente del rezago de la Pendiente, de su propio rezago y del rezago del Entorno-Macro. Finalmente, el factor Entorno-Macro sólo se ve afectado por el rezago de la Curvatura y del VIX. La figura 9 muestra el ajuste del VAR(1) para los factores macroeconómicos. El ajuste del nivel, pendiente y curvatura es casi idéntico al de la figura 5 por lo que no se incluye nuevamente. Todos los factores presentan un buen ajuste salvo el Entorno Macro, para el cual la dinámica refleja más su tendencia que su magnitud.

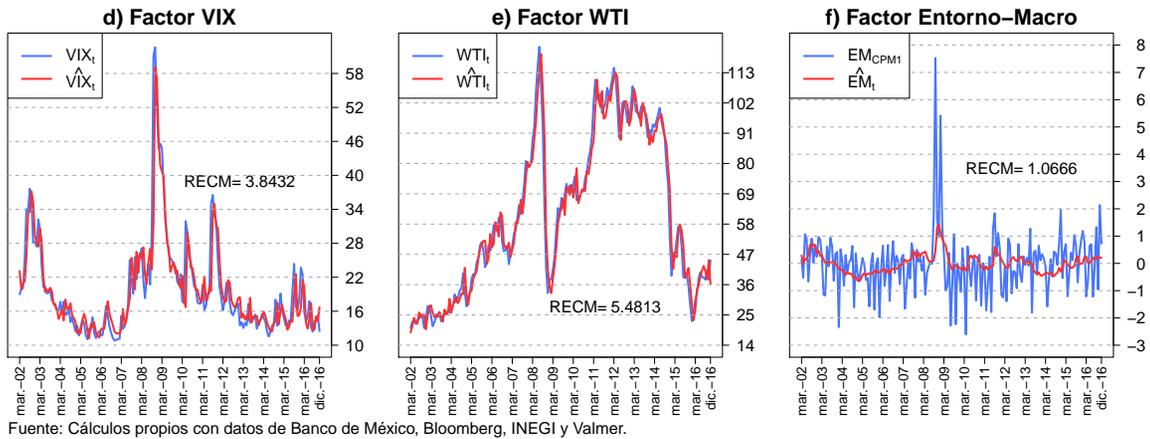


Figura 9: Ajuste de la dinámica de los factores macroeconómicos.

Así, los parámetros estimados de la ecuación de la dinámica de estado son:

$$\hat{c}' = \begin{bmatrix} -0.218 & -0.051 & -0.039 & 0.591 & 2.032 & -0.565 \end{bmatrix}$$

²⁰Cabe mencionar que se realizaron las pruebas para verificar que el modelo VAR con estos seis factores es estacionario. Las raíces inversas son 0.968, 0.945, 0.918, 0.891+0.058i, 0.891-0.058i y -0.016; por lo que se encuentran dentro del círculo unitario y, en consecuencia, el VAR es estacionario.

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} 0.988 & 0.06 & 0.41 & 0.013 & 0 & -0.063 \\ -0.013 & 0.901 & -0.121 & -0.001 & 0.001 & 0.006 \\ -0.004 & -0.01 & 0.895 & 0.001 & 0 & 0.003 \\ -0.289 & -0.468 & -3.024 & 0.857 & 0.036 & 0.462 \\ 0.137 & 1.129 & -1.291 & 0.056 & 0.951 & -1.612 \\ 0.021 & 0.143 & -0.749 & 0.036 & -0.002 & 0.006 \end{bmatrix} \quad \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.243 & 0.019 & -0.008 & -0.253 & -0.158 & -0.112 \\ 0.019 & 0.085 & 0.004 & -0.199 & -0.019 & -0.029 \\ -0.008 & 0.004 & 0.008 & 0.086 & -0.019 & 0.027 \\ -0.253 & -0.199 & 0.086 & 15.375 & -8.987 & 2.377 \\ -0.158 & -0.019 & -0.019 & -8.987 & 31.274 & -2.889 \\ -0.112 & -0.029 & 0.027 & 2.377 & -2.889 & 1.184 \end{bmatrix}$$

La tabla 9 se muestra los resultados de estimar los parámetros de la ecuación de corto plazo. Los coeficientes correspondientes al Nivel, a la Pendiente y a la Curvatura son significativos al 1% de confianza y son muy similares a los obtenidos para el Modelo Observable. No obstante, ninguno de los factores macroeconómicos es significativo. A pesar de ello, el coeficiente R^2 verifica que se tiene un buen ajuste del modelo a los datos.²¹ Esto parece indicar que los factores macroeconómicos no afectan la tasa de corto plazo, pero podrían estar afectando las de mediano y largo plazo.

Tabla 9: Estimación de los parámetros de la ecuación de corto plazo para el Modelo Obs-Macro.

	Coefficiente	Error Est.	Valor Est. t	valor-p	Signif.
α_0	5.587	0.014	390.526	0.000	***
Nivel (α_1^1)	-0.615	0.002	-395.338	0.000	***
Pendiente (α_1^2)	0.713	0.006	124.262	0.000	***
Curvatura (α_1^3)	0.527	0.018	29.192	0.000	***
VIX (α_1^4)	0.000	0.001	0.735	0.464	
WTI (α_1^5)	-0.000	0.000	-0.718	0.473	
Entorno-Macro (α_1^6)	-0.001	0.004	-0.254	0.800	
R^2	0.999				
R^2 ajust.	0.999				

Código de significancia: 0.001 – >'***', 0.01 – >'**', 0.05 – >'*', 0.1 – >'.', No signif – >'

Fuente: Cálculos propios con datos de Banco de México, Bloomberg, INEGI y Valmer.

Para encontrar los estimadores de σ^2 , λ_0 y λ_1 , se plantearon las mismas especificaciones que para el modelo Observable y se utilizó el mismo proceso de calibración. La tabla 20 del apéndice E resume dicho proceso. El modelo con matriz λ_1 diagonal presenta el mejor ajuste de los rendimientos y se utiliza para completar la estimación del modelo. Así, los estimadores

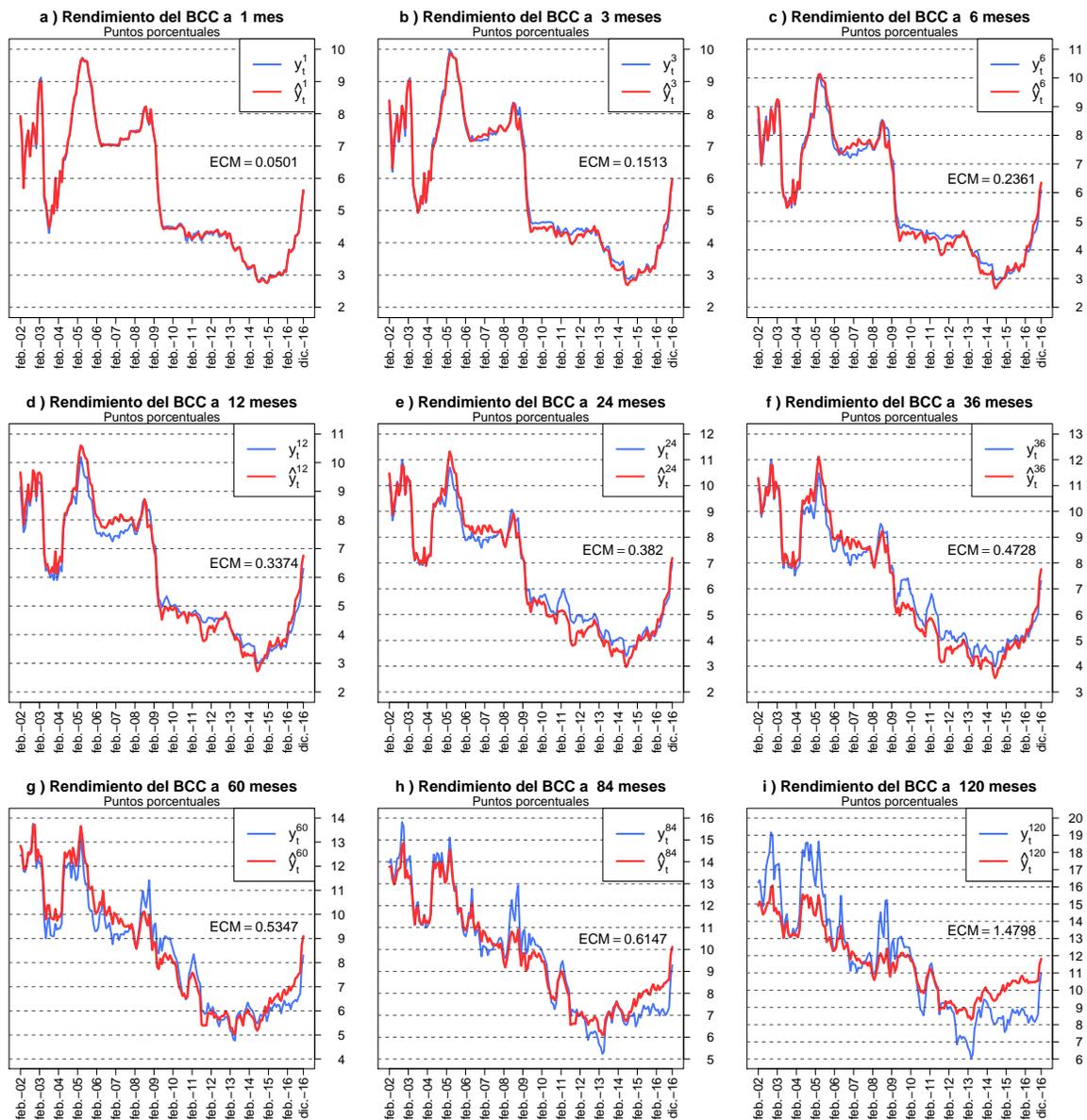
²¹Es importante notar que esta estimación podría sufrir del problema de regresión espuria, ya que el valor de la R^2 es muy cercano a uno y los estadísticos tienen valores t muy altos. Este problema puede derivarse del hecho de que la tasa de corto plazo, así como los factores son series de tiempo no estacionarias. Estas relaciones no implican causalidad; no obstante, los resultados del modelo siguen siendo válidos.

de los parámetros del precio del riesgo bajo la especificación **a** son:

$$\hat{\sigma}^2 = 0.378 \quad \hat{\lambda}_0 = \begin{bmatrix} -21.642 & 11.708 & -52.579 & 8.524 & -0.036 & -64.415 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\lambda}_1 = \text{diag}(-0.148, -0.918, 28.92, 0.031, 0.03, 0.592)$$

La figura 10 muestra las tasas estimadas y observadas bajo la especificación **a**.



Fuente: Cálculos propios con datos de Banco de México, Bloomberg, INEGI y Valmer.

Figura 10: Ajuste de los rendimientos de los BCC para el Modelo Obs-Macro a.

El ajuste para las tasas de corto plazo presenta RECM menores a 0.25, mientras que el ajuste de las tasas de mediano y largo plazo muestra mayores desfases, sobre todo para la tasa de 120 meses. No obstante, se sigue muy de cerca su dinámica.²²

Una vez que se tiene calibrado y ajustado el modelo, se pueden estimar los rendimientos de los BCC para el horizonte de pronóstico. Nuevamente los pronósticos se obtienen con el método dinámico. En particular, para poder obtener el pronóstico de las tasas de interés, además de pronosticar el nivel, pendiente y curvatura, se deben pronosticar el VIX, WTI y Entorno Macro. Estos pronósticos se generan a partir de la ecuación de dinámica de estado aunque también sería posible utilizar los valores observados de los factores en el horizonte de pronóstico. La tabla 10 muestra el valor observado de las tasas en el horizonte de pronóstico junto con los pronósticos fuera de muestra.

Tabla 10: Pronósticos fuera de muestra de los rendimientos para el Modelo Obs-Macro.

	R0M			R3M			R6M		
	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error
ene. 2017	5.8132	5.7609	0.0522	6.2432	6.0864	0.1568	6.5495	6.4376	0.1120
feb. 2017	6.1358	5.8441	0.2917	6.3453	6.1555	0.1897	6.6053	6.4968	0.1085
mar. 2017	6.3318	5.9188	0.4130	6.5559	6.2161	0.3398	6.7209	6.5473	0.1736
abr. 2017	6.4994	5.9845	0.5149	6.6422	6.2678	0.3744	6.7794	6.5890	0.1905
may. 2017	6.6105	6.0414	0.5691	6.8473	6.3111	0.5362	7.0136	6.6224	0.3913
jun. 2017	6.8550	6.0898	0.7652	7.0259	6.3463	0.6796	7.1473	6.6480	0.4993
RECM		0.4887			0.4214			0.2867	

	R12M			R24M			R36M		
	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error
ene. 2017	6.7882	6.8434	-0.0552	7.3334	7.2773	0.0561	7.7402	7.8421	-0.1019
feb. 2017	6.8053	6.8961	-0.0908	7.1867	7.3268	-0.1401	7.5524	7.8901	-0.3377
mar. 2017	6.8750	6.9398	-0.0648	7.2015	7.3671	-0.1656	7.5750	7.9288	-0.3538
abr. 2017	6.8756	6.9746	-0.0990	7.1273	7.3983	-0.2710	7.5690	7.9586	-0.3896
may. 2017	7.1368	7.0010	0.1358	7.3827	7.4211	-0.0384	7.7645	7.9801	-0.2155
jun. 2017	7.1491	7.0198	0.1293	7.2828	7.4363	-0.1535	7.4867	7.9940	-0.5073
RECM		0.1004			0.1574			0.3428	

	R60M			R84M			R120M		
	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error
ene. 2017	8.7427	9.1807	-0.4380	9.7334	10.1914	-0.4580	11.5327	11.8748	-0.3421
feb. 2017	8.4109	9.2248	-0.8139	9.3331	10.2298	-0.8967	10.9634	11.9028	-0.9394
mar. 2017	8.3374	9.2601	-0.9228	9.1508	10.2605	-1.1097	10.6528	11.9254	-1.2726
abr. 2017	8.2639	9.2872	-1.0232	9.0014	10.2840	-1.2826	10.3897	11.9427	-1.5530
may. 2017	8.4360	9.3066	-0.8706	9.1549	10.3009	-1.1461	10.4576	11.9552	-1.4976
jun. 2017	8.0617	9.3191	-1.2574	8.7414	10.3119	-1.5705	9.8374	11.9635	-2.1262
RECM		0.9212			1.1307			1.402	

Fuente: Cálculos propios con datos de Banco de México, Bloomberg, INEGI y Valmer.

²²En Lelo-de Larrea (2018) se pueden encontrar las estimaciones para los distintos rendimientos en la muestra bajo el resto de las especificaciones. Las especificaciones b y c producen resultados comparables (salvo para el largo plazo), mientras que las especificaciones con factor de Cholesky obtiene ajustes muy malos para las tasas de mediano y largo plazo.

El pronóstico de las tasas de corto y mediano plazo es muy cercano al valor observado y siguen la misma tendencia. En contraste, las tasas de largo plazo presentan errores de pronósticos más grandes (se sobrestiman) con RECM alrededor de 1.2.

4.8. Modelo Latente-Macro

En este modelo latente, se incorporaran los factores macroeconómicos estimados como variables de entrada con la intención de mejorar el ajuste y pronóstico del Modelo Latente. Se utilizan las mismas especificaciones que en el Modelo Latente salvo que, en este caso, para la matriz de covarianzas de la ecuación de observación (R) se utilizan dos parámetros distintos: uno para la varianza correspondiente a los rendimientos y otro para la varianza de los factores macroeconómicos.²³ Los estimadores de los parámetros son:

- Covarianza del error de medida:

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} 0.028 I_9 & 0_{9 \times 3} \\ 0_{3 \times 9} & 453.9882 I_3 \end{bmatrix}$$

- Ecuación de la tasa de corto plazo:

$$\hat{\alpha}_0 = 0.1497 \quad \hat{\alpha}_1 = [-1.9272 \quad 0.8218 \quad 0.1795 \quad -0.1197 \quad -0.0075 \quad 0.2775]'$$

- Ecuación de la dinámica de estado:

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} -0.0244 \\ 1.0282 \\ -0.1371 \\ -4.862 \\ 0.6304 \\ 12.714 \end{bmatrix} \quad \hat{\Phi} = \begin{bmatrix} 1.0038 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.917 & 0.978 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.1217 & -0.0017 & -0.3752 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4571 & 0.4047 & 0.077 & -0.5107 & 0 & 0 \\ 0.7728 & 0.6895 & -0.2701 & -0.7546 & 0.9187 & 0 \\ 0.0274 & -0.7205 & -0.2741 & 0.207 & 0.1933 & 0.1098 \end{bmatrix}$$

²³La estimación de éstos se realizó vía Máxima Verosimilitud de los errores utilizando la función *fminsearch* de Matlab al igual que en el Modelo Latente. Dado que el número de parámetros a estimar es mucho mayor, se permitió un máximo de 250,000 iteraciones o 250,000 evaluaciones de la función objetivo. Ver apéndice F.

$$\hat{\Sigma} = \text{diag}(0.001, 0.1136, 0.3211, 0.0772, 2.4047, 0.0427)$$

- Ecuación del precio del riesgo:

$$\hat{\lambda}_0 = \begin{bmatrix} -6.2603 \\ 1.8286 \\ 0.6392 \\ 10.389 \\ 4.2781 \\ 8.3546 \end{bmatrix} \quad \hat{\lambda}_1 = \begin{bmatrix} -0.2128 & 0.5149 & -0.0669 & -0.1476 & -0.0023 & 0.0714 \\ -4.9705 & 0.2692 & 0.0343 & -0.4721 & 0.1676 & -0.034 \\ -0.0968 & 0.2502 & -1.6078 & 5.3054 & 0.7209 & -1.9157 \\ -0.1323 & -2.9798 & -5.1451 & -4.9084 & -1.2095 & -4.404 \\ 1.3268 & 0.2837 & 1.0294 & 2.2076 & 0.3674 & -1.0119 \\ -4.1585 & -17.404 & 0.168 & 3.8692 & -1.5503 & -3.0629 \end{bmatrix}$$

Se sabe que el nivel, la pendiente y la curvatura son determinantes de la dinámica de la curva de rendimientos, por lo que se espera que algunos de los factores latentes estimados con el filtro de Kalman los representen. Sin embargo, no se puede decir lo mismo de las variables macroeconómicas; es decir, en el caso ideal, se esperaría que algunos factores replicaran la dinámica del VIX, del WTI y del Entorno-Macro. No obstante, es posible que sean otras variables las que terminen de determinar la curva de rendimientos de México, como por ejemplo las expectativas de inflación de las encuestas, volatilidad implícita en opciones, entre otras; o simplemente, combinaciones lineales de los factores tradicionales.

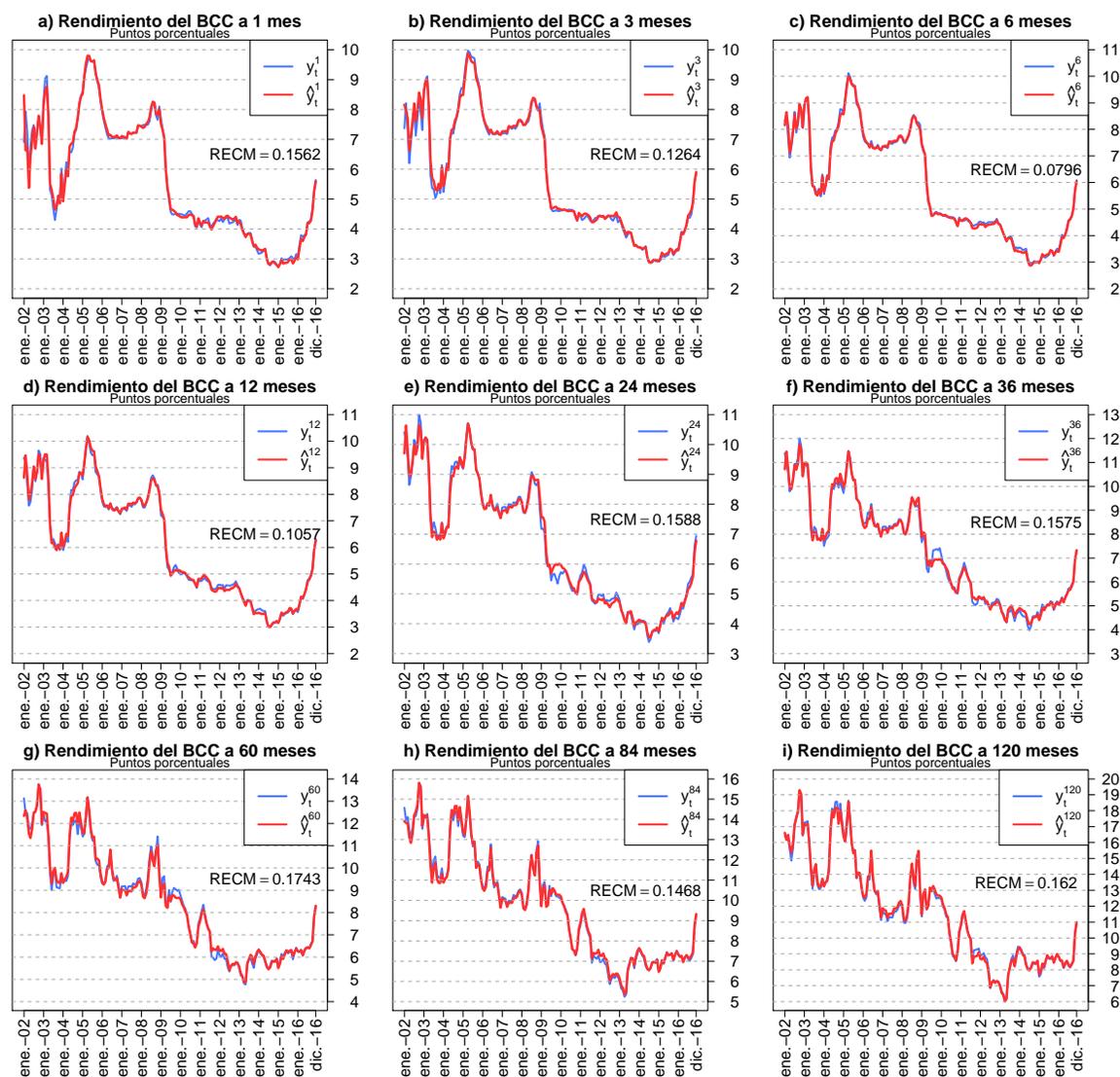
La tabla 11 muestra la correlación que existe entre los estimadores de los factores latentes y las series observadas para intentar hacer un empate entre éstas. No es posible identificar sólo un factor que tenga correlación alta con las series observadas; e incluso hay series que parecen no tener relación con ninguno de los factores. Las definiciones de nivel tienen la correlación más alta con el segundo factor y las definiciones de pendiente con el primero. En contraste, las definiciones de curvatura no tienen correlación tan alta con ninguno de los factores latentes, lo cual sería consistente con el hecho de que en el ACP aplicado a los rendimientos bastaba con tomar las primeras dos componentes para explicar la mayor parte de la varianza en las tasas de los BCC para México. Por lo tanto, se decide empatar el nivel, la pendiente y la curvatura empíricos con los factores dos, uno y seis respectivamente. La gráfica de los factores observados y sus estimadores asociados es muy similar a la de la figura 4.

Tabla 11: Matriz de correlaciones de los factores latentes con sus definiciones empíricas.

	FK_1	FK_2	FK_3	FK_4	FK_5	FK_6
$Nivel_1$	-0.817	0.968	0.499	0.852	0.218	-0.626
$Nivel_2$	-0.899	0.918	0.527	0.814	0.154	-0.635
$Pend_1$	-0.684	0.108	0.490	0.159	-0.612	-0.564
$Pend_2$	-0.673	0.084	0.516	0.134	-0.611	-0.543
$Pend_3$	-0.894	0.316	0.478	0.325	-0.311	-0.505
$Curv_1$	-0.588	-0.025	0.439	-0.014	-0.162	-0.099
$Curv_2$	-0.250	-0.104	0.013	-0.097	0.419	0.404
VIX	-0.216	0.174	0.153	0.170	0.004	-0.165
WTI	0.567	-0.440	-0.502	-0.410	0.291	0.581
Entorno-Macro	-0.023	0.062	0.004	0.021	-0.019	-0.059

Nota: En negritas se muestran aquellas correlaciones mayores o iguales a 0.6.

Fuente: Cálculos propios con datos de Banco de México, Bloomberg, INEGI y Valmer.



Fuente: Cálculos propios con datos de Banco de México, Bloomberg, INEGI y Valmer.

Figura 11: Ajuste de los rendimientos para el Modelo Latente-Macro.

La figura 11 presenta la estimación de los rendimientos de los BCC para este modelo. Similar al Modelo Latente, el ajuste de las tasas es casi perfecto para todos los vencimientos; de hecho, todas las tasas tienen un RECM entre 0.0796 y 0.1743.

Los valores observados y los pronósticos fuera de muestra para las tasas se presentan en la tabla 12. Los pronósticos se obtienen con el método dinámico a partir de pronosticar con la ecuación de la dinámica de estado el valor de los factores latentes en el horizonte de pronóstico. Cabe destacar que en este modelo no se realizan pronósticos sobre las variables macroeconómicas pues ninguna de estas coincide con alguno de los factores latentes estimados en el Filtro de Kalman. Los pronósticos del modelo subestimaron todas las tasas de corto plazo, aunque siguen la misma tendencia observada. Para el mediano plazo se tienen los menores errores de pronóstico con RECM cercanos a 0.3. En contraste, los pronósticos de largo plazo sobreestiman las tasas observadas en el horizonte de pronóstico y tienen una tendencia contraria.

Tabla 12: Pronósticos fuera de muestra de los rendimientos para el Modelo Latente-Macro.

	R0M			R3M			R6M		
	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error
ene. 2017	5.8132	5.5331	0.2801	6.2432	5.9343	0.3089	6.5495	6.0868	0.4627
feb. 2017	6.1358	5.6771	0.4587	6.3453	6.0205	0.3248	6.6053	6.1650	0.4403
mar. 2017	6.3318	5.7773	0.5545	6.5559	6.1060	0.4499	6.7209	6.2494	0.4715
abr. 2017	6.4994	5.9095	0.5899	6.6422	6.2058	0.4364	6.7794	6.3454	0.4340
may. 2017	6.6105	6.0334	0.5771	6.8473	6.3102	0.5371	7.0136	6.4491	0.5645
jun. 2017	6.8550	6.1693	0.6857	7.0259	6.4246	0.6013	7.1473	6.5626	0.5847
RECM		0.5397			0.4553			0.4965	

	R12M			R24M			R36M		
	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error
ene. 2017	6.7882	6.3102	0.4780	7.3334	6.8419	0.4915	7.7402	7.4201	0.3201
feb. 2017	6.8053	6.3880	0.4173	7.1867	6.9376	0.2491	7.5524	7.5457	0.0067
mar. 2017	6.8750	6.4739	0.4011	7.2015	7.0408	0.1607	7.5750	7.6775	-0.1025
abr. 2017	6.8756	6.5715	0.3041	7.1273	7.1567	-0.0294	7.5690	7.8222	-0.2532
may. 2017	7.1368	6.6784	0.4584	7.3827	7.2827	0.1000	7.7645	7.9767	-0.2122
jun. 2017	7.1491	6.7957	0.3534	7.2828	7.4193	-0.1365	7.4867	8.1416	-0.6549
RECM		0.4064			0.2446			0.3294	

	R60M			R84M			R120M		
	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error	Obs.	Pronos.	Error
ene. 2017	8.7427	8.4595	0.2832	9.7334	9.5624	0.1710	11.5327	11.3320	0.2007
feb. 2017	8.4109	8.6550	-0.2441	9.3331	9.8265	-0.4934	10.9634	11.7010	-0.7376
mar. 2017	8.3374	8.8545	-0.5171	9.1508	10.0940	-0.9432	10.6528	12.0740	-1.4212
abr. 2017	8.2639	9.0665	-0.8026	9.0014	10.3740	-1.3726	10.3897	12.4590	-2.0693
may. 2017	8.4360	9.2871	-0.8511	9.1549	10.6610	-1.5061	10.4576	12.8520	-2.3944
jun. 2017	8.0617	9.5170	-1.4553	8.7414	10.9570	-2.2156	9.8374	13.2550	-3.4176
RECM		0.8056			1.3053			2.0125	

Fuente: Cálculos propios con datos de Banco de México, Bloomberg, INEGI y Valmer.

5. Comparación de Modelos

Por la naturaleza de los distintos modelos planteados es posible realizar comparaciones en tres sentidos: comparar los modelos tradicionales entre sí (Observable vs. Latente), comparar cada modelo tradicional con el modelo aumentado con los factores macroeconómicos (Observable vs. Obs-Macro y Latente vs. Latente-Macro) y comparar los modelos aumentados (Obs-Macro vs. Latente-Macro).

En este sentido, se realiza la comparación de los modelos siguiendo dos enfoques: el menor RECM y la prueba estadística de Harvey et al. (1997). La comparación con el RECM se puede encontrar en el apéndice G. El resto de esta sección se enfoca en presentar la comparación en la precisión de los pronósticos, dentro y fuera de muestra, de las distintas especificaciones del modelo afín presentadas a través de la prueba Harvey et al. (1997). Dicha prueba es una modificación de la prueba de Diebold y Mariano (1995) para muestras pequeñas. El detalle de ambas pruebas estadísticas se puede consultar en el apéndice G.

Sea e_{it} el error de pronóstico del modelo $i \in \{1, 2\}$ y sea $g(e_{it})$ la función que proporciona el error entre la serie observada y la predicción del modelo i (que en este caso corresponde al RECM). De esta manera, dicha función permite plantear tres hipótesis nulas distintas:

- 1) $H_0 : E[g(e_{1t})] = E[g(e_{2t})]$; es decir, igualdad en la precisión de los pronósticos;
- 2) $H_0 : E[g(e_{1t})] \geq E[g(e_{2t})]$; es decir, el primer modelo tiene menor o igual precisión de pronóstico que el segundo modelo;
- 3) $H_0 : E[g(e_{1t})] \leq E[g(e_{2t})]$; es decir, el primer modelo tiene mayor o igual precisión de pronóstico que el segundo modelo.

A continuación se presentan los resultados de aplicar la prueba Harvey et al. (1997) con $H_0 : E[g(e_{1t})] \leq E[g(e_{2t})]$ a los pronósticos dentro y fuera de muestra obtenidos en las secciones previas.²⁴

²⁴Cabe recordar que los pronósticos dentro de muestra se obtienen utilizando los factores observados para encontrar el valor de las tasas en el periodo muestral. Por otro lado, los pronósticos fuera de muestra se obtienen bajo el método dinámico utilizando el pronóstico de los factores a partir de la ecuación de dinámica de estado en el horizonte de pronóstico.

5.1. Comparación de los Pronósticos Dentro de Muestra

La tabla 13 muestra el valor del estadístico S_1^* , así como el criterio de significancia para la prueba Harvey et al. (1997) para los pronósticos dentro de muestra bajo la hipótesis nula de que el primer modelo tiene mejor o igual precisión de pronóstico que el segundo modelo.²⁵ Comparando los modelos tradicionales, se rechaza la hipótesis nula para todas las tasas excepto la de un mes. Por lo tanto, de manera general se puede concluir que **el Modelo Latente genera pronósticos dentro de muestra con mejor precisión que el Modelo Observable.**

En cuanto a los modelos con factores observables, para las tasas de corto y mediano plazo, así como para la tasa de 60 meses no se rechaza la hipótesis nula de que el Modelo Observable tiene mayor o igual precisión en el pronóstico dentro de muestra que el Modelo Obs-Macro. Sin embargo, para las tasas de más largo plazo sí se rechaza la hipótesis nula; por lo que **agregar factores macroeconómicos ayuda a mejorar dichos pronósticos.**

Para los modelos con factores latentes, se rechaza la hipótesis nula de que el Modelo Latente tiene mayor o igual precisión de pronóstico dentro de muestra que el Modelo Latente-Macro para las tasas de seis, 12 y 24 meses. **Por lo tanto, agregar factores macroeconómicos al utilizar el filtro de Kalman es útil para mejorar el ajuste de mediano plazo** pero no para mejorar el de los extremos de la curva de rendimientos.

Si se contrasta el pronóstico dentro de muestra para los modelos aumentados, similar a los modelos tradicionales, se rechaza la hipótesis nula de que el Modelo Obs-Macro genera pronósticos dentro de muestra que son igual o más precisos que los generados por el Modelo Latente-Macro en todos los vencimientos salvo en la tasa de corto plazo. En ambos casos el resultado puede deberse al sobre ajuste que se genera con el filtro de Kalman. Cabe destacar que todos estos resultados están en línea con los obtenidos bajo el criterio del menor RECM.

²⁵El primer modelo mencionado en el encabezado de cada columna se utiliza como “modelo 1” y el segundo modelo mencionado se utiliza como “modelo 2” para llevar a cabo la prueba estadística. Por ejemplo, para la primera columna en la que se comparan los modelos tradicionales, la hipótesis nula correspondiente es que el Modelo Observable tiene mejor o igual precisión de pronóstico que el Modelo Latente.

Tabla 13: Resultados de la prueba Harvey, Leybourne y Newbold (1997) para el pronóstico dentro de muestra.

Tasa	Observable vs. Latente		Observable vs. Obs-Macro		Latente vs. Latente-Macro		Obs-Macro vs. Latente-Macro	
	Est-DM	Signif	Est-DM	Signif	Est-DM	Signif	Est-DM	Signif
1 mes	-6.2290		0.5442		-0.7056		-2.2418	
3 meses	2.3799	**	-5.7139		-4.3237		1.8220	*
6 meses	6.4568	***	-5.0228		2.3605	**	9.4342	***
12 meses	7.5157	***	-8.2188		1.5860	.	10.8238	***
24 meses	2.2496	*	-6.9957		1.3343	.	8.6326	***
36 meses	9.6870	***	-7.3180		-5.4972		11.4717	***
60 meses	6.9161	***	-7.4082		-1.7091		11.5156	***
84 meses	10.1883	***	4.9018	***	-0.9104		7.9662	***
120 meses	7.9472	***	3.4712	***	-5.4344		11.2256	***

Código de significancia: 0.001 – >'***', 0.01 – >'**', 0.05 – >'*', 0.1 – >'.', No signif – >' '

Fuente: Cálculos propios con datos de Banco de México, Bloomberg, INEGI y Valmer.

5.2. Comparación de los Pronósticos Fuera de Muestra

Análogamente, la tabla 14 muestra los resultados de aplicar la prueba Harvey et al. (1997) para los pronósticos fuera de muestra bajo la hipótesis nula de que el primer modelo tiene mejor o igual precisión de pronóstico que el segundo modelo. En este caso, la prueba se realiza para horizontes de pronóstico de uno a tres meses (páneos a), b) y c) respectivamente) para todos los vencimientos con el objetivo de analizar si la precisión de los modelos se modifica conforme se incrementa el horizonte de pronóstico.²⁶

Para los modelos tradicionales y para todos los horizontes de pronóstico, no se rechaza la hipótesis nula de que el Modelo Observable genera pronósticos con mayor o igual precisión que el Modelo Latente salvo para la tasa de 36 meses. Así, se puede concluir que **para realizar pronósticos fuera de muestra es mejor utilizar un modelo con factores observables.**

Para los modelos con factores observables, de forma general, se rechaza la hipótesis nula de que el Modelo Observable genere pronósticos fuera de muestra con mayor o igual precisión que el Modelo Obs-Macro para las tasas de corto y mediano plazo en los tres horizontes de pronóstico (salvo para 36 meses cuando $h = 1$ y para un mes cuando $h = 3$). Por lo tanto,

²⁶Cabe mencionar que también se realizó la prueba Harvey et al. (1997) para vencimientos de cuatro a seis meses (para cubrir todo el horizonte de pronóstico de este estudio), pero varios de estos casos arrojaban una varianza estimada negativa invalidando la prueba y, por lo tanto, no se incluyeron dichos resultados en esta sección. Sin embargo, aquellas tasas para las que sí fue posible calcular el estadístico arrojaron resultados consistentes con los reportados en la tabla 14.

agregar factores macroeconómicos al modelo ayuda a mejorar los pronósticos fuera de muestra de corto y mediano plazo pero no los de largo plazo.

En el caso de los modelos con factores latentes sí existe una diferencia en la prueba dependiendo del horizonte de pronóstico analizado. Esto es, para un horizonte de pronóstico de un mes, se rechaza la hipótesis nula de que el Modelo Latente genera mejores o iguales pronósticos fuera de muestra que el Modelo Latente-Macro para las tasas de corto plazo, así como para las de 12 y 24 meses; en contraste, conforme aumenta el horizonte de pronóstico ($h = 2$ y $h = 3$) no se rechaza la hipótesis nula para las tasas de corto plazo (de uno y tres meses respectivamente). Con esto se podría concluir que **los factores macroeconómicos ayudan al pronóstico de las tasas de mediano plazo independientemente del horizonte de pronóstico, pero a las de corto plazo sólo en horizontes de pronóstico pequeños.**

Finalmente, comparando los modelos aumentados con factores macroeconómicos, no se rechaza la hipótesis nula de que el Modelo Obs-Macro genera mejores o iguales pronósticos fuera de muestra que el Modelo Latente-Macro en ningún caso. Esto es similar a los resultados de comparar los modelos tradicionales. Estos resultados son contrarios a los obtenidos para los pronósticos dentro de muestra, pero son consistentes con los obtenidos en la comparación de pronósticos fuera de muestra bajo el enfoque del menor RECM.

Por lo tanto, se podría concluir que **no hay un único modelo que sea superior ajustando todos los vencimientos de los BCC dentro y/o fuera de muestra para el caso de México.** Si el objetivo es ajustar un modelo a los rendimientos, de manera general, lo recomendable es utilizar el Modelo Latente para las tasas de corto y largo plazo, pero el Modelo Latente-Macro para ajustar las tasas de mediano plazo. En contraste, si el objetivo es realizar pronósticos fuera de muestra, de manera general se podría concluir que para las tasas de corto plazo y mediano plazo, lo recomendable es utilizar el Modelo Obs-Macro, pero el Modelo Observable para las tasas de largo plazo. Por último, **incluir factores macroeconómicos ayuda a mejorar el ajuste y pronóstico de las tasas de corto y mediano plazo** tanto para el modelo afín con factores observables como para el modelo afín con factores latentes.

Tabla 14: Resultados de la prueba Harvey, Leybourne y Newbold (1997) para el pronóstico fuera de muestra.

a) Horizonte de pronóstico h=1 mes

Tasa	Observable vs. Latente		Observable vs. Obs-Macro		Latente vs. Latente-Macro		Obs-Macro vs. Latente-Macro	
	Est-DM	Signif	Est-DM	Signif	Est-DM	Signif	Est-DM	Signif
1 mes	-2.9980		2.8633	*	2.3515	*	-1.3695	
3 meses	-3.6554		3.9560	**	3.2257	*	-1.0355	
6 meses	-4.6196		4.4215	**	3.4959	**	-10.2050	
12 meses	-6.0108		3.3680	**	3.3914	**	-7.2157	
24 meses	-4.6910		3.5149	**	3.7248	**	-0.8066	
36 meses	5.1053	**	0.4840		-0.4642		0.1852	
60 meses	-0.5978		-4.1125		-2.0120		1.1345	
84 meses	0.6524		-4.2587		-2.3108		-0.9278	
120 meses	0.5550		-2.4016		-2.2825		-1.7794	

b) Horizonte de pronóstico h=2 meses

Tasa	Observable vs. Latente		Observable vs. Obs-Macro		Latente vs. Latente-Macro		Obs-Macro vs. Latente-Macro	
	Est-DM	Signif	Est-DM	Signif	Est-DM	Signif	Est-DM	Signif
1 mes	-1.7484		1.7173	.	1.3833		-0.8464	
3 meses	-2.1103		2.3183	*	1.8794	.	-0.6548	
6 meses	-2.6634		2.5872	*	2.0324	*	-7.6662	
12 meses	-3.4651		2.0086	.	1.9508	.	-8.6484	
24 meses	-3.2147		3.3396	*	2.5863	*	-0.5730	
36 meses	4.0947	**	2.0032	.	-0.4862		0.1343	
60 meses	-0.4837		-3.1516		-1.3270		0.7287	
84 meses	0.5314		-2.9060		-1.4320		-0.5675	
120 meses	0.3765		-1.5495		-1.3963		-1.0822	

c) Horizonte de pronóstico h=3 meses

Tasa	Observable vs. Latente		Observable vs. Obs-Macro		Latente vs. Latente-Macro		Obs-Macro vs. Latente-Macro	
	Est-DM	Signif	Est-DM	Signif	Est-DM	Signif	Est-DM	Signif
1 mes	-1.3139		1.2921		1.0439		-0.6987	
3 meses	-1.6050		1.7840	.	1.4335		-0.5220	
6 meses	-2.0384		2.0391	*	1.5591	.	-5.0604	
12 meses	-2.7034		1.6604	.	1.5122	.	-4.9021	
24 meses	-2.2208		3.5425	**	2.0179	*	-0.4626	
36 meses	3.6558	**	1.6987	.	-0.3398		0.1327	
60 meses	-0.3449		-2.3010		-0.9850		0.6393	
84 meses	0.5839		-2.1951		-1.0678		-0.4449	
120 meses	0.3114		-1.1690		-1.0450		-0.8304	

Código de significancia: 0.001 – >'***', 0.01 – >'**', 0.05 – >'*', 0.1 – >'.', No signif – >' '

Fuente: Cálculos propios con datos de Banco de México, Bloomberg, INEGI y Valmer.

6. Consideraciones Finales

Se estimaron cuatro especificaciones de un modelo afín con condición de aversión al riesgo y no arbitraje para la ETTI de México con el objetivo de contrastar sus propiedades empíricas y la precisión de sus pronósticos dentro y fuera de muestra. En particular, se buscó comparar los modelos tradicionales (con factores observables y con factores latentes), así como extender dichos modelos agregando variables macroeconómicas para analizar si éstas aportaban información relevante tal que se mejoraran los pronósticos de los modelos tradicionales.

El resultado principal consiste en el ajuste y pronóstico de la ETTI en México para las cuatro especificaciones planteadas. Sin embargo, no es posible concluir que exista superioridad de alguna de las especificaciones para todos los vencimientos. Se verifica que el nivel, la pendiente y la curvatura de la curva de rendimientos son determinantes de la ETTI en México, pero no es posible identificar alguna de las variables macroeconómicas como factores que determinen su dinámica. No obstante, de manera general, se concluye que agregar variables macroeconómicas ayuda a mejorar el pronóstico de corto y mediano plazo independientemente de si los factores utilizados son observables o latentes. Además, parece existir una relación inversa entre la exactitud de los pronósticos dentro y fuera de muestra en todos los modelos. Ponderando el costo de estimar distintos modelos para las distintas tasas de interés contra la ganancia que se pueda tener en la exactitud del pronóstico, para ajustar los rendimientos lo recomendable es utilizar el modelo con factores latentes; sin embargo, para obtener pronósticos fuera de muestra se sugiere utilizar un modelo con factores observables que incorpore variables macroeconómicas. Es importante destacar que la selección del periodo muestral y del horizonte de pronóstico puede ser un factor que introduzca ruido en el modelo. Esto debido a que las elecciones presidenciales en Estados Unidos coinciden con el final del periodo muestral y, como ya es conocido, tuvieron un impacto negativo en los mercados financieros; en especial en el mercado mexicano. Esto llevó a que las tasas de los BCC tuvieran un comportamiento extraordinario para finales del 2016 y para los primeros meses del 2017, que coinciden con el inicio del horizonte de pronóstico. De cierta manera, el pronóstico de los modelos mantuvo la

tendencia observada en los meses de noviembre y diciembre del 2016 que, como se mostró en varias gráficas, fue completamente diferente a la del primer semestre del 2017.

Si bien el documento realiza importantes contribuciones a la literatura, todavía existen muchas líneas de investigación por seguir. Sería de utilidad estimar los modelos observables utilizando únicamente los factores Nivel y Pendiente para investigar si el factor Curvatura contribuye a mejorar el modelo. Adicionalmente, sería interesante plantear una quinta especificación en la que se combinen factores observables y latentes. Esto es, tomar los factores nivel, pendiente y curvatura como latentes pero tomar las variables macroeconómicas como observables. Por otro lado, sería útil aplicar métodos de estimación de parámetros que no dependan de condiciones iniciales; por ejemplo, los algoritmos genéticos que han tenido aplicación en problemas de teoría de juegos y finanzas. Por último, tomando en cuenta los cambios de tendencia que presentan las series estudiadas, sería interesante implementar un modelo con cambios de régimen aunque se aumentaría la complejidad del mismo.

Referencias

- Aguilar-Argaez, A. M., Elizondo, R., y Roldán-Peña, J., 2016. Descomposición de la compensación por inflación y riesgo inflacionario en México.
- Ang, A., Bekaert, G., y Wei, M., 2008. The term structure of real rates and expected inflation. *The Journal of Finance*, 63(2):797–849.
- Ang, A. y Piazzesi, M., 2003. A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables. *Journal of Monetary Economics*, 50(4):745–787.
- Ang, A., Piazzesi, M., y Wei, M., 2006. What does the yield curve tell us about GDP growth? *Journal of Econometrics*, 131(1-2):359–403.
- Chávez, C., Sánchez, J., y De la Cerda, J., 2015. Análisis de componentes principales funcionales en series de tiempo económicas. *Revista Internacional de Gestión del Conocimiento y la Tecnología*, 3(2).
- Chen, Y. y Tsang, K. P., 2013. What does the yield curve tell us about exchange rate predictability? *Review of Economics and Statistics*, 95(1):185–205.
- Cortés, J., Ramos-Francia, M., y Torres, A., 2008. Un análisis empírico de la estructura temporal de tasas de interés en México. *Banco de México. Documento de Investigación*, (2008-07).
- Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E., y Ross, S. A., 1985. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 385–407.
- Dai, Q. y Singleton, K. J., 2000. Specification analysis of affine term structure models. *The Journal of Finance*, 55(5):1943–1978.
- Dewachter, H., Lyrio, M., y Maes, K., 2006. A joint model for the term structure of interest rates and the macroeconomy. *Journal of Applied Econometrics*, 21(4):439–462.

- Diebold, F. y Mariano, R., 1995. Comparing predictive accuracy. *Journal of Business and Economic Statistics*, 13:253–265.
- Diebold, F. X. y Li, C., 2006. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics*, 130(2):337–364.
- Diebold, F. X., Rudebusch, G. D., y Aruoba, S. B., 2006. The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach. *Journal of econometrics*, 131(1-2):309–338.
- Duan, J. y Simonato, J., 1999. Estimating and testing exponential-affine term structure models by Kalman filter. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 13(2):111–135.
- Duffie, D. y Kan, R., 1996. A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, 6(4):379–406.
- Duffie, D., Pan, J., y Singleton, K., 2000. Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica*, 68(6):1343–1376.
- Elizondo, R., 2013. Pronósticos de la estructura temporal de las tasas de interés en México utilizando un modelo afín. *Banco de México, working paper*.
- Favero, C. A., Niu, L., y Sala, L., 2012. Term structure forecasting: No-arbitrage restrictions versus large information set. *Journal of Forecasting*, 31(2):124–156.
- Gimeno, R. y Marqués, J.M., 2009. Extraction of financial market expectations about inflation and interest rates from a liquid market. *Banco de España working paper*.
- Hamilton, J.D., 1994. *Time series analysis*, vol. 2. Princeton University Press Princeton.
- Harvey, D., Leybourne, S., y Newbold, P., 1997. Testing the equality of prediction mean squared errors. *International Journal of Forecasting*, (13):281–291.
- Kilian, L. y Lewis, L. T., 2011. Does the fed respond to oil price shocks? *The Economic Journal*, 121(555):1047–1072.

- Lelo-de Larrea, A., 2018. Comparación de Pronósticos de la Estructura Temporal de Tasas de Interés para Distintas Especificaciones de un Modelo Afín Para el Caso de México (Tesis de Licenciatura). *Instituto Tecnológico Autónomo de México, CDMX*.
- Nelson, C. R. y Siegel, A. F., 1987. Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of Business*, pp. 473–489.
- Piazzesi, M., 2010. Affine term structure models. *Handbook of Financial Econometrics*, 1:691–766.
- Singleton, K. J. y Umantsev, L., 2002. Pricing coupon-bond options and swaptions in affine term structure models. *Mathematical Finance*, 12(4):427–446.
- Svensson, L., 1994. Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994.
- Vasicek, O., 1977. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2):177–188.

Apéndice

A. Filtro de Kalman aplicado al Modelo Afín

Tabla 15: Ecuaciones del filtro de Kalman para un modelo afín con factores latentes.

Ecuaciones de Predicción	
$\hat{x}_{t t-1}^L = c^L + \Phi^L \hat{x}_{t-1 t-1}^L$	(4)
$P_{t t-1}^L = \Phi^L P_{t-1 t-1}^L \Phi^{L'} + \Sigma^L$	(5)
Ecuaciones de Corrección	
$K_t = P_{t t-1}^L \hat{B}_n (\hat{B}_n' P_{t t-1}^L \hat{B}_n + R)^{-1}$	(6)
$\hat{x}_{t t}^L = \hat{x}_{t t-1}^L + K_t (y_t^{(n)} - \hat{A}_n - \hat{B}_n' \hat{x}_{t t-1}^L)$	(7)
$P_{t t}^L = (I - K_t \hat{B}_n') P_{t t-1}^L$	(8)

Fuente: Hamilton (1994)

B. Fuentes de Información

Tabla 16: Directorio de datos.

Serie	Especificación	Unidades	Periodicidad	Fuente
R0M	Tasa de 0 meses (Nodo 1)	Puntos porcentuales	Diaria	VALMER
R1M	Tasa de 1 mes (Nodo 28)	Puntos porcentuales	Diaria	VALMER
R3M	Tasa de 3 meses (Nodo 91)	Puntos porcentuales	Diaria	VALMER
R6M	Tasa de 6 meses (Nodo 182)	Puntos porcentuales	Diaria	VALMER
R12M	Tasa de 12 meses (Nodo 364)	Puntos porcentuales	Diaria	VALMER
R24M	Tasa de 24 meses (Nodo 728)	Puntos porcentuales	Diaria	VALMER
R36M	Tasa de 36 meses (Nodo 1092)	Puntos porcentuales	Diaria	VALMER
R60M	Tasa de 60 meses (Nodo 1820)	Puntos porcentuales	Diaria	VALMER
R84M	Tasa de 84 meses (Nodo 2548)	Puntos porcentuales	Diaria	VALMER
R120M	Tasa de 120 años (Nodo 3600)	Puntos porcentuales	Diaria	VALMER
VIX	VIX Index	Niveles	Diaria	Bloomberg
WTI	CL1 Comdtty	Dólares por barril	Diaria	Bloomberg
USDMXN	Tipo de Cambio Fix	Pesos por dólar	Diaria	Banxico
INPC	Indice Nacional de Precios al Consumidor	Base segunda quincena de diciembre 2010 = 100	Mensual	INEGI
PIB	Producto Interno Bruto (serie desestacionalizada)	Billones de pesos, base = 2008	Trimestral	INEGI

C. Modelo Observable: Resultados Adicionales

C.1. Estimación de los Parámetros de la Ecuación de Estado

Tabla 17: Estimación de la ecuación de la dinámica de estado para el Modelo Observable.

	Coefficiente	Error. Est.	Valor Est. t	Valor-p	Significancia
c_1	0.024	0.037	0.654	0.514	
Φ_{11}	0.980	0.012	80.669	0.000	***
Φ_{12}	0.040	0.049	0.820	0.413	
Φ_{13}	0.435	0.167	2.601	0.010	*
c_2	0.008	0.022	0.382	0.703	
Φ_{21}	-0.007	0.007	-1.006	0.316	
Φ_{22}	0.916	0.029	31.875	0.000	***
Φ_{23}	-0.162	0.098	-1.645	0.102	
c_3	0.003	0.007	0.471	0.638	
Φ_{31}	-0.003	0.002	-1.475	0.142	
Φ_{32}	-0.009	0.009	-0.929	0.354	
Φ_{33}	0.864	0.032	26.850	0.000	***

Código de significancia: 0.001 – >'***', 0.01 – >'**', 0.05 – >'*', 0.1 – >'.', No signif – >' '

Fuente: Cálculos propios con datos de Valmer.

C.2. Calibración del Modelo Observable

Tabla 18: Resumen de la calibración del modelo afín con factores observables.

Modelo	No. Param	Param. Inicial			Total Pruebas	Pruebas \neq NA	Óptimo	
		Desde	Hasta	Increment.			Param. Inicial	RECM
Obs.a	7	0.1	10	0.1	100	100	8.1	0.5657
Obs.b	10	0.1	10	0.1	100	100	3.3	0.4693
Obs.c	13	0.1	10	0.1	100	84	2.1	0.4615
Obs.d	7	0.1	10	0.1	100	63	3.5	0.7075
Obs.e	10	0.1	10	0.1	100	64	5.6	0.5843
Obs.f	13	0.1	5	0.05	100	69	3.4	0.7730

Fuente: Cálculos propios con datos de Valmer.

D. Modelo Latente: Resultados Adicionales

D.1. Calibración del Modelo Latente

Un punto importante para el buen funcionamiento del filtro de Kalman es el valor inicial de los parámetros. Así, para calibrar el modelo se probaron 200 valores iniciales para los parámetros comenzando con $p_i = 0.01$ y terminando con $p_i = 2$ tomando incrementos de 0.01, donde p_i es el i -ésimo parámetro del modelo. Se seleccionó aquel parámetro p_i tal que el modelo tuviera el menor RECM. De esta manera, tomando $p_i = 0.73 \forall i$ como valor inicial para los parámetros, la optimización se llevó a cabo en 15,886 iteraciones y con 21,603 evaluaciones de la función objetivo. Además, se obtuvo una log-verosimilitud de -1267.31, así como un RECM de 0.1237.

E. Modelo Obs-Macro: Resultados Adicionales

E.1. Estimación de los Parámetros de la Ecuación de Estado

Tabla 19: Estimación de los parámetros de la ecuación de la dinámica de estado para el Modelo Obs-Macro.

	Coficiente	Error. Est.	Valor Est. t	Valor-p	Signif.
c_1	-0.218	0.139	-1.574	0.117	
Φ_{11}	0.988	0.015	65.851	0.000	***
Φ_{12}	0.060	0.055	1.083	0.280	
Φ_{13}	0.410	0.175	2.352	0.020	*
Φ_{14}	0.013	0.005	2.546	0.012	*
Φ_{15}	-0.000	0.002	-0.111	0.912	
Φ_{16}	-0.063	0.038	-1.670	0.097	.
c_2	-0.051	0.082	-0.627	0.532	
Φ_{21}	-0.013	0.009	-1.460	0.146	
Φ_{22}	0.901	0.033	27.583	0.000	***
Φ_{23}	-0.121	0.103	-1.177	0.241	
Φ_{24}	-0.001	0.003	-0.444	0.658	
Φ_{25}	0.001	0.001	1.362	0.175	
Φ_{26}	0.006	0.022	0.281	0.779	
c_3	-0.039	0.026	-1.502	0.135	
Φ_{31}	-0.004	0.003	-1.481	0.140	
Φ_{32}	-0.010	0.010	-0.952	0.342	
Φ_{33}	0.895	0.032	27.722	0.000	***
Φ_{34}	0.001	0.001	0.681	0.497	
Φ_{35}	0.000	0.000	1.425	0.156	
Φ_{36}	0.003	0.007	0.441	0.660	
c_4	0.591	1.103	0.536	0.593	
Φ_{41}	-0.289	0.119	-2.427	0.016	*
Φ_{42}	-0.468	0.440	-1.063	0.289	
Φ_{43}	-3.024	1.388	-2.179	0.031	*
Φ_{44}	0.857	0.040	21.549	0.000	***
Φ_{45}	0.036	0.013	2.719	0.007	**
Φ_{46}	0.462	0.302	1.530	0.128	
c_5	2.032	1.574	1.291	0.198	
Φ_{51}	0.137	0.170	0.803	0.423	
Φ_{52}	1.129	0.627	1.800	0.074	.
Φ_{53}	-1.291	1.979	-0.652	0.515	
Φ_{54}	0.056	0.057	0.994	0.322	
Φ_{55}	0.951	0.019	50.107	0.000	***
Φ_{56}	-1.612	0.431	-3.740	0.000	***
c_6	-0.565	0.306	-1.844	0.067	.
Φ_{61}	0.021	0.033	0.620	0.536	
Φ_{62}	0.143	0.122	1.170	0.243	
Φ_{63}	-0.749	0.385	-1.945	0.053	.
Φ_{64}	0.036	0.011	3.231	0.001	**
Φ_{65}	-0.002	0.004	-0.608	0.544	
Φ_{66}	0.006	0.084	0.074	0.941	

Código de significancia: 0.001 -> '***', 0.01 -> '**', 0.05 -> '*', 0.1 -> '.', No signif -> ''

Fuente: Cálculos propios con datos de Banco de México, Bloomberg, INEGI y Valmer.

E.2. Calibración del Modelo Obs-Macro

Tabla 20: Resumen de la calibración del modelo afín con factores observables y factores macroeconómicos.

Modelo	No. Param.	Param. Inicial			Total Pruebas	Pruebas \neq NA	Óptimo	
		Desde	Hasta	Increment.			Param. Inicial	RECM
Obs-Macro.a	13	0.001	0.1	0.001	100	51	0.011	0.4731
Obs-Macro.b	28	0.001	0.1	0.001	100	72	0.045	0.5949
Obs-Macro.c	43	0.001	0.1	0.001	100	49	0.051	0.67013
Obs-Macro.d	13	0.005	0.6	0.005	120	90	0.505	2.0731
Obs-Macro.e	28	0.005	0.51	0.005	102	84	0.31	2.4576
Obs-Macro.f	43	0.005	0.4	0.005	80	33	0.245	6.2330

Fuente: Cálculos propios con datos de Banco de México, Bloomberg, INEGI y Valmer.

F. Modelo Latente-Macro: Resultados Adicionales

F.1. Calibración del Modelo Latente-Macro

Para calibrar el modelo se probaron 100 valores iniciales para los parámetros comenzando con $p_i = 0.01$ y terminando con $p_i = 1$ con incrementos de 0.01 donde p_i es el i -ésimo parámetro del modelo. Como en los modelos anteriores, se seleccionó aquel valor inicial tal que el modelo tuviera el menor RECM. De acuerdo con esto, el mejor parámetro inicial corresponde a $p_i = 0.016$. Sin embargo, el ajuste del modelo no fue lo suficientemente bueno. Por ello, se utilizaron como valores iniciales de los parámetros los valores óptimos arrojados al utilizar $p_i = 0.016$ como valor inicial. De esta manera, la optimización se llevó a cabo en 224,276 iteraciones con 242,609 evaluaciones de la función objetivo y una log-verosimilitud de 996.315.

G. Comparación de Modelos: Resultados Adicionales

En este apéndice se incluye la comparación de los modelos bajo el criterio del RECM y se desarrollan las ideas básicas de las pruebas Diebold y Mariano (1995) y Harvey et al. (1997) para comparación de pronósticos. Es importante mencionar que las demostraciones y algunos conceptos están fuera del alcance de este trabajo. Para una referencia más detallada, consultar los artículos originales.

G.1. Comparación Mediante la Raíz Error Cuadrático Medio

G.1.1. Comparación de los Pronósticos Dentro de Muestra

La tabla 21 muestra el RECM para cada uno de los rendimientos, así como el RECM promedio para cada modelo. Comparando los modelos tradicionales se obtiene el resultado esperado, pues el Modelo Latente obtiene mejores ajustes dentro de muestra para todos los rendimientos excepto el de un mes. Esto se debe al hecho de que el Filtro de Kalman es un algoritmo del tipo predictor-corrector y mejora sus estimaciones cuando se van conociendo los rendimientos a lo largo del tiempo.

Tabla 21: Comparación del pronóstico dentro de muestra de los rendimientos para los distintos modelos.

	Obs.	Obs.+Macro	Latentes	Latentes+Macro
1 mes	0.0507	0.0501	0.1320	0.1562
3 meses	0.0849	0.1513	0.0692	0.1264
6 meses	0.1549	0.2361	0.1012	0.0796
12 meses	0.1939	0.3374	0.1205	0.1057
24 meses	0.2167	0.3820	0.1733	0.1588
36 meses	0.3299	0.4728	0.1119	0.1575
60 meses	0.3121	0.5347	0.1594	0.1743
84 meses	0.9149	0.6147	0.1405	0.1468
120 meses	1.8960	1.4798	0.1055	0.1620
ECM Prom	0.4616	0.4732	0.1237	0.1408

Fuente: Cálculos propios con datos de Banco de México, Bloomberg, ootnotesizeINEGI y Valmer.

Comparando los modelos con factores observables, el RECM para la tasa de un mes es prácticamente el mismo en ambos (ligeramente menor para el Modelo Obs-Macro). Sin

embargo, para las otras dos tasas de corto plazo, así como para las tasas de 12, 24, 36 y 60 meses, el Modelo Observable es el que da el mejor ajuste. Por su parte, para las tasas de 84 y 120 meses el Modelo Obs-Macro es el que produce el menor RECM. Es decir, de manera general, el Modelo Observable da un mejor ajuste para las tasas de corto y mediano plazo mientras que el Modelo Obs-Macro genera un mejor ajuste para las tasas de largo plazo con ganancia promedio de 0.16 puntos en RECM; por lo que se puede concluir que los factores macroeconómicos ayudan a mejorar el ajuste del extremo de largo plazo de la curva de rendimientos. Promediando el RECM de todos los vencimientos, el Modelo Observable es el que se ajusta mejor a la curva de rendimientos de los BCC aunque la diferencia con el Modelo Obs-Macro es muy pequeña.

Comparando los modelos con factores latentes, de las figuras 7 y 11 se podía inferir que ambos modelos daban un ajuste casi perfecto de los rendimientos; lo cual, podría indicar un sobreajuste del modelo.²⁷ Como se puede observar en la tabla 21, de manera general, el Modelo Latente es el que mejor se ajusta a las tasas de corto y largo plazo, mientras que el Modelo Latente-Macro es el que mejor se ajusta a las tasas de mediano plazo, si bien las diferencias son marginales. Lo anterior difiere de los resultados obtenidos para los modelos con factores observables. Promediando el RECM para todas las tasas, se obtiene que el Modelo Latente es el que mejor se ajusta a la curva de rendimientos de los BCC.

Por último, comparando los modelos aumentados con factores macroeconómicos se obtienen resultados similares a la comparación de los modelos tradicionales. Esto es, salvo para la tasa de un mes, el Modelo Latente-Macro genera mejores ajustes que el Modelo Obs-Macro.

G.1.2. Comparación de los Pronósticos Fuera de Muestra

La tabla 22 muestra el RECM para cada uno de los rendimientos, así como el RECM promedio para cada modelo. Comparando los modelos tradicionales se obtiene un resultado

²⁷El sobreajuste u “overfitting” de un modelo ocurre cuando éste es muy complejo, por ejemplo cuando tiene demasiados parámetros a estimar relativo al número de observaciones. Esto ocasiona que el modelo se “pegue” mucho a los datos observados; es decir, que refleje patrones específicos del periodo muestral y que no sea capaz de reflejar los patrones generales del mismo. La principal consecuencia de un sobreajuste de un modelo es que tiene poco poder predictivo pues reacciona demasiado ante variaciones en la muestra.

contrario a lo esperado, pues el Modelo Observable obtiene, en promedio, mejores pronósticos fuera de muestra que el Modelo Latente. Si se analiza el RECM para cada uno de los rendimientos, se puede concluir que el Modelo Observable da mejores pronósticos para las tasas de corto y mediano plazo (exceptuando la tasa de 36 meses); mientras que el Modelo Latente da mejores pronósticos para las tasas de largo plazo (exceptuando la tasa de 60 meses).

Tabla 22: Comparación del pronóstico fuera de muestra de los rendimientos para los distintos modelos.

	Obs.	Obs-Macro	Latente	Latente-Macro
1 mes	0.6150	0.4887	0.9313	0.5397
3 meses	0.6329	0.4214	1.0026	0.4553
6 meses	0.5917	0.2867	0.9930	0.4965
12 meses	0.4426	0.1004	0.7767	0.4064
24 meses	0.4262	0.1574	0.4646	0.2446
36 meses	0.3875	0.3428	0.2682	0.3294
60 meses	0.2282	0.9212	0.2528	0.8056
84 meses	0.4827	1.1307	0.4669	1.3053
120 meses	0.7145	1.4020	0.6532	2.0125
RECM Prom	0.5024	0.5835	0.6455	0.7328

Fuente: Cálculos propios con datos de Banco de México, Bloomberg, INEGI y Valmer.

Comparando los modelos con factores observables, el menor RECM para los pronósticos de corto y mediano plazo se obtiene en el modelo aumentado con factores macroeconómico, de hecho el RECM disminuye, en promedio, 0.21 puntos. Por su parte, el menor RECM para los pronósticos de los rendimientos de largo plazo se obtiene con el Modelo Observable. En general, el menor RECM promedio se obtiene con el Modelo Observable. Estos resultados son contrarios a los obtenidos para el pronóstico dentro de muestra.

Si bien los modelos con factores latentes parecían ser igual de buenos ajustando los rendimientos, para los pronósticos fuera de muestra sí existe una clara diferencia. El Modelo Latente es el que da el menor RECM para los pronósticos de las tasas de largo plazo; mientras que el Modelo Latente-Macro es el que da el mejor pronóstico de las tasas de corto y mediano plazo (salvo la tasa de 36 meses); de hecho, el RECM disminuye, en promedio, 0.47 (0.17) puntos para las tasas de corto (mediano) plazo. Esto sugiere que el agregar factores macroeconómicos al modelo ayuda a mejorar el pronóstico fuera de muestra de corto y mediano plazo, pero no

el extremo de largo plazo de la curva de rendimientos.

Entre los modelos aumentados, el Modelo Obs-Macro es el que obtiene los menores RECM para todos los vencimientos excepto para 36 y 60 meses. Esto es contrario a lo ocurrido para los pronósticos dentro de muestra.

G.2. Prueba Diebold y Mariano (1995)

La prueba Diebold y Mariano (1995) es una prueba estadística para comparación de pronósticos que tiene como hipótesis nula la igualdad en la precisión del pronóstico generado a partir de dos modelos distintos.

Sean $\{\hat{y}_{1t}\}_{t=1}^n$ y $\{\hat{y}_{2t}\}_{t=1}^n$ los pronósticos generados por dos modelos distintos para la serie de tiempo $\{y_t\}_{t=1}^n$. De esta manera, sean $\{\hat{e}_{1t}\}_{t=1}^n$ y $\{\hat{e}_{2t}\}_{t=1}^n$ los respectivos errores de pronóstico. Además, sea $g(y_t, \hat{y}_{it}) = g(\hat{e}_{it})$ la función con que se evaluará la calidad del pronóstico. Entonces, la hipótesis nula de igualdad de precisión de pronósticos está dada por $H_0 : E[g(\hat{e}_{1t})] = E[g(\hat{e}_{2t})]$; o bien, equivalentemente, $H_0 : E[g(\hat{e}_{1t}) - g(\hat{e}_{2t})] = 0$.

Sea $d_t = g(\hat{e}_{1t}) - g(\hat{e}_{2t})$ con $t = 1, \dots, n$ el diferencial de precisión de los dos pronósticos; así la prueba se basa en la media muestral de d_t (denotada \bar{d}) convirtiendo la hipótesis nula en $H_0 : \bar{d} = 0$. Para muestras grandes se puede demostrar que el estadístico \bar{d} sigue una distribución asintóticamente normal; es decir,

$$\bar{d} \sim N\left(\mu, \frac{2\pi f_d(0)}{n}\right)$$

con $f_d(0) = (2\pi)^{-1} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma_d(\tau)$ la función de densidad espectral de d en la frecuencia cero y $\gamma_d(\tau) = E[(d_t - \mu)(d_{t-\tau} - \mu)]$ la función de autocovarianza de orden τ . Un problema es que la serie \bar{d}_t suele estar autocorrelacionada. De hecho, los autores mencionan que para un pronóstico de h pasos adelante, comúnmente el error de pronóstico sigue un proceso $MA(h-1)$, por lo que asumen que las autocorrelaciones de orden h o superior para d son cero. De esta manera, bajo la hipótesis nula, el estadístico de la prueba se contrasta con los valores

críticos de una normal estándar y está dado por

$$S_1 = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{2\pi\hat{f}_d(0)}{n}}} \sim N(0, 1) \quad (9)$$

con $\hat{f}_d(0)$ un estimador consistente de la función de densidad espectral de d que involucra un promedio ponderado de las autocovarianzas del diferencial de precisión a partir de una ventana rezagada.²⁸

Diebold y Mariano (1995) se enfocan en experimentos para un horizonte de pronóstico de dos periodos adelante bajo la medida del RECM. Para muestras grandes, la prueba obtiene un desempeño satisfactorio para series con errores correlacionados y autocorrelacionadas, con distribuciones de colas pesadas y con errores distribuidos normalmente.

G.3. Prueba Harvey, Leybourne y Newbold (1997)

El problema con la prueba de Diebold y Mariano (1995) es que puede presentar sobre-especificación para una predicción con dos o más pasos hacia adelante, además de que ésta aumenta conforme se incrementa el tamaño del horizonte de pronóstico. Por ello, Harvey et al. (1997) proponen una modificación a la prueba de Diebold y Mariano (1995), la cual pondera por el horizonte de pronóstico y el tamaño de la muestra.

De acuerdo con los autores, la varianza exacta del estadístico \bar{d} está dada por

$$V(\bar{d}) = n^{-1} \left[\gamma_0 + 2n^{-1} \sum_{k=1}^{h-1} (n-k)\gamma_k \right]. \quad (10)$$

y afirman que la varianza asintótica de \bar{d} utilizada por Diebold y Mariano (1995) se puede estimar como

$$V(\bar{d}) \approx n^{-1} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{h-1} \gamma_k \right].$$

²⁸El detalle de la estimación de la función de densidad espectral está fuera del alcance de esta tesis. Para mayor detalle consultar Diebold y Mariano (1995).

con γ_k la autocovarianza de orden k para d_t ; el cual, es un estimador sesgado pues

$$E[\hat{V}(\bar{d})] = \left[\frac{n+1-2h+n^{-1}h(h-1)}{n} \right] V(\bar{d}).$$

Dentro de las modificaciones de la prueba, los autores utilizan un estimador insesgado de (10) y contrastan el estadístico de prueba con los valores críticos de una distribución t -Student con $(n-1)$ grados de libertad. De esta manera, el estadístico de prueba modificado está dado por

$$S_1^* = \left[\frac{n+1-2h+n^{-1}h(h-1)}{n} \right]^{1/2} S_1,$$

con S_1 el estadístico de prueba Diebold y Mariano (1995) en (9), h el horizonte de pronóstico y n el tamaño de la muestra.